

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

POUR L'OBTENTION

DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Michel LORRAIN

Ingénieur Civil des Ponts et Chaussées

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA MICROMÉCANIQUE DES MATÉRIAUX GRANULAIRES COHÉRENTS APPLICATION AUX BÉTONS

Soutenue le 28 Février 1974 devant la Commission d'Examen :

MM. J. FARRAN

Président

E. ABSI

P. HABIB

R. L'HERMITE

J.-C. MASO

} Examineurs

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

POUR L'OBTENTION

DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Michel LORRAIN

Ingénieur Civil des Ponts et Chaussées

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA MICROMÉCANIQUE DES MATÉRIAUX GRANULAIRES COHÉRENTS APPLICATION AUX BÉTONS

Soutenue le 28 Février 1974 devant la Commission d'Examen :

MM. J. FARRAN

Président

E. ABSI

P. HABIB

R. L'HERMITE

J.-C. MASO

} Examineurs

THESE

LE DEVOIR DE L'ETAT

PAR M. L. DE LAUNAY

DE LA FACULTE

DES SCIENCES POLITIQUES

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA MECHANIQUE

DES MATIERES GRANULEUSES CONTINUES

APPLICATION AUX BLOIS



Imprimé par M. L. DE LAUNAY

UNIV. LEIDEN
BIBL.
LEIDEN

UNIVERSITE PAUL SABATIER DE TOULOUSE

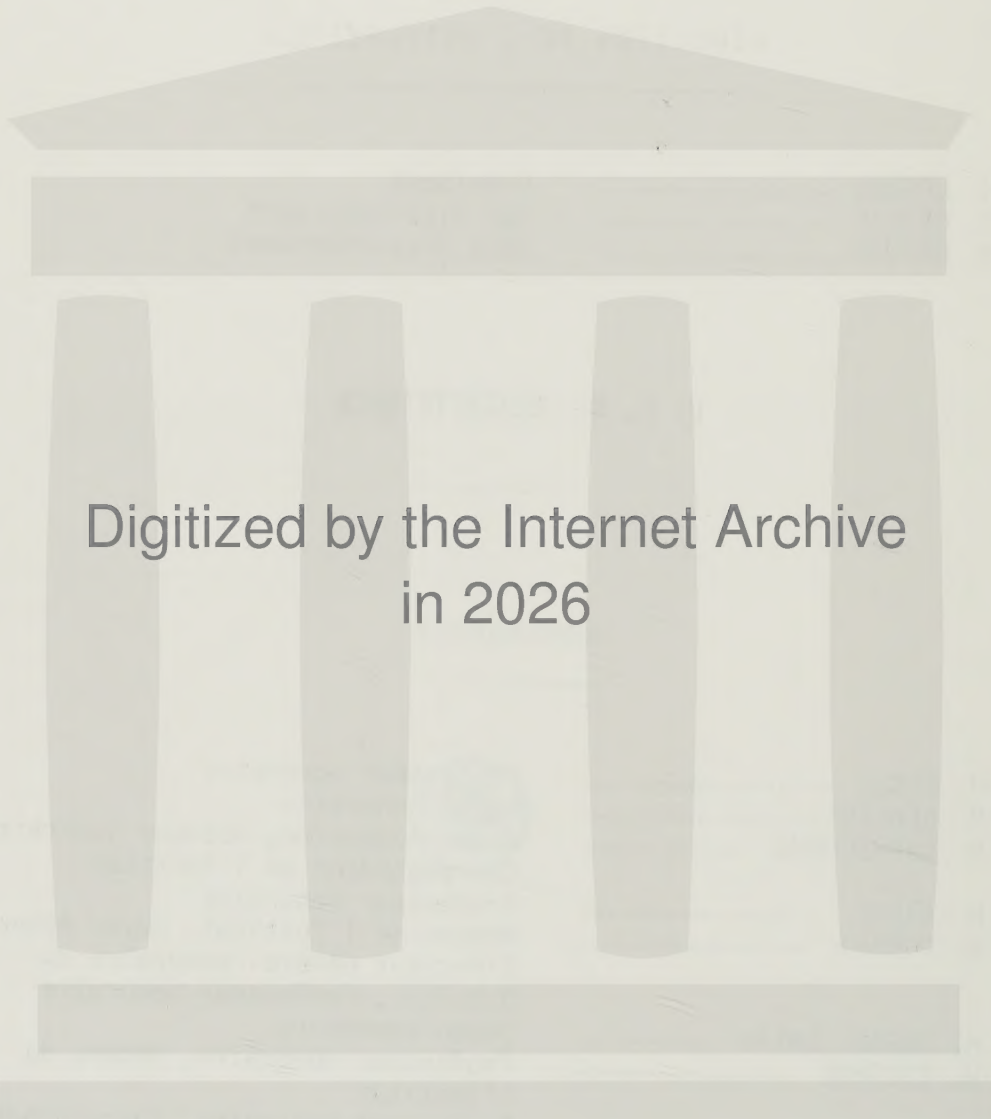
DIRECTION DE L'UNIVERSITE

M. LARENG	Président
M. MATHIS	1er Vice-Président
M. MARTIN	2ème Vice-Président

U. E. R. SCIENTIFIQUES

HONORARIAT

M. BEDOS	Professeur honoraire
M. BLAIZOT	Doyen honoraire
M. CAPDECOMME	Doyen honoraire, Recteur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. DIEHL	Professeur honoraire
M. DUPOUY	Membre de l'Institut, Doyen honoraire, Directeur Général honoraire du C.N.R.S., Professeur honoraire
M. DURAND Emile	Doyen honoraire
M. ESCANDE	Professeur honoraire, Membre de l'Institut
M. GAUSSEN	Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. JACQUES	Professeur honoraire
M. MASDUPUY	Professeur honoraire
M. MATHIS	Doyen honoraire
M. MIGNONAC	Professeur honoraire
M. MORQUER	Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. SECONDAT	Professeur honoraire
M. TEISSIE-SOLIER	Professeur honoraire
M. VANDEL	Professeur honoraire, Membre de l'Institut



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546613_0013

PROFESSEURS

M. CASTERAS	Géologie, Correspondant de l'Institut
M. CAPDECOMME	Minéralogie, Correspondant de l'Institut
M. NOUVEL	Biologie Générale
M. GALLAIS	Chimie, Correspondant de l'Institut
M. DURAND Emile	Physique
M. FERT	Physique
M. LESBRE	Chimie Organique
M. BRUNEL	Physiologie Végétale
M. HURON	Mathématiques Appliquées
M. MARGULIS	Pédologie
M. TRICHE	Chimie Analytique et Spectrographie
M. LEDOUX	Zoologie Appliquée
M. RIVALS	Agriculture
M. PERRIER	Physique
M. MATHIS	Chimie
M. ORLIAC	Géochimie et Minéralogie
M. LAFOURCADE	Physique
M. ANGELIER	Zoologie
M ^{lle} DE FERRE	Botanique
M. FARRAN	Minéralogie et Géotechnique
M. LAUDET	Physique Théorique et Calcul Numérique
M. SERFATY	Biologie Animale
M. LAGASSE	Electrotechnique
M. BLANC	Physique Nucléaire
M. LEREDDE	Botanique
M. LELUBRE	Géologie
M. TROCHAIN	Botanique
M. LALAGUE	Mathématiques Générales
M. BOUIGUE	Astronomie
M. COUCHET	Physique
M. LASCOMBES	Botanique
M. ASSELINEAU	Chimie Biologique
M. MAURET	Chimie Systématique
M. AGID	Physiologie
M. MONTANT	Cryptogamie
M. GAUTIER	Physique
M. CRUMEYROLLE	Mathématiques
M. GOURINARD	Géologie
M. PULOU	Minéralogie
M. CAMBOU	Physique Spatiale
M. MIQUEL	Chimie
M. LACOSTE	Electrotechnique
M. THIBAUT	Mécanique Rationnelle et Appliquée
M. MASCART	Mathématiques
M. MEDIONI	Psychophysiologie
M. RAYNAUD Pierre	Physiologie Animale
M. ZALTA	Chimie Biologique
M. SEVELY	Electrotechnique

M. POMMIEZ	Mathématiques
M. REY Paul	Biologie Végétale
M. COULOMB	Physique
M. TRINQUIER	Physique
M. MARONI	Chimie
M. BEETSCHEN	Biologie Générale
M. DERACHE	Physiologie Animale
M. SATGE	Chimie Organique
M. LATTES	Chimie
M. VEDRENNE	Géophysique
M. DURAND-DELGA	Géologie
M. CARRARA	Physique
M. JEANNIN	Chimie Minérale
M. MAHENC	Chimie
M. MIROUSE	Géologie
M. BITSCH	Zoologie

PROFESSEURS ASSOCIES

M. ANDERSON	Physique Spatiale
M. LUNC	Mathématiques

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme BRUNEL	Physiologie Végétale
M. PICCA	Physique
M. MERIC	Mathématiques Appliquées
Mme LECAL	Zoologie
M. PILOD	Physique
M. LARROQUE	Physique
M. BARRANS	Chimie
Mme LAFON	Mathématiques
Melle LAPEYRE	Mathématiques - Informatique
M. BERTRAND	Chimie
M. DESQ	Mathématiques
M. ROCARD	Electronique
M. DEGEILH	Physique
M. POILBLANC	Chimie
M. TOUZE	Physiologie Végétale
M. FRASNAY	Mathématiques
M. CASSAGNAU	Zoologie
M. GUERIN	Mathématiques
M. PESCIA	Physique

M. SOUQUET	Géologie
M. SCHNEIDER	Biologie Cellulaire
M. SICARD	Biologie Génétique
M. DE LOTH	Chimie Physique
M. MARTIN J.C.	Génie Electrique
M. SAPORTE	Physique
M. PERENNOU	Informatique
M. THENOZ	Génie Civil
M. REY Gérard	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. CAUSSINUS	Mathématiques Appliquées
M. DURAND Philippe	Physique
M. CASTAN	Informatique
M. REME	Mesures Physiques

MAITRES DE CONFERENCES

M. FONTAN	Physique Nucléaire
M. BAUDRAS	Chimie Biologique
M. ATTEIA	Mathématiques
M. CALVET	Mécanique des Fluides
M. PAGANI	Physique
M. CUPPENS	Mathématiques
Melle BARBANCE	Mathématiques
M. VERDIER Pierre	Physique
M. GILLY	Génie Mécanique
M. BEAUFILS	Informatique
M. COTTU	Génie Mécanique
M. ROUTIE	Génie Chimique
M. MARAL	Physique
M. BERTHELEMY	Zoologie
M. HURAU	Physique
M. LEGRAND	Génie Civil
M. ABATUT	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. SOTIROPOULOS	Chimie Organique
Mme GERVAIS	Chimie Inorganique
M. BONEL	Chimie
M. MAUSS	Mécanique
M. TERJANIAN	Mathématiques
M. BANCEL	Mathématiques
M. JOSSERAND	Mesures Physiques
M. BETOURNE	Informatique
M. CAMPAN	Psychophysiologie
M. CLERC	Mécanique
M. GRIFONE	Mathématiques
M. ETTINGER	Mathématiques
M. LETAC	Mathématiques
M. BONNET Louis	Biologie Quantitative
M. LOUARN	Génétique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

M. BACCAR Chimie Organique

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. PRADINES Mathématiques
M. NGUYEN THANH VAN Mathématiques
M. GALINIER Michel Informatique

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

PROFESSEURS

M. NOUGARO Hydraulique Générale et Appliquée
M. GARDY Génie Chimique
M. BIREBENT Electronique Appliquée
M. VOIGT Chimie Minérale
M. MONTEL Chimie Physique et Electrochimie
M. THIRRIOT Hydrodynamique
M. GRUAT Mécanique des Fluides (Hydraulique)
M. BUGAREL Génie Chimique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. HAMANT Botanique
Melle BERDUCOU Physiologie Végétale
M. DAT Mécanique des Fluides
M. FALLOT Biologie Végétale (Viticulture et Arboriculture)

M. TRUCHASSON	Mécanique
M. HOFFMANN	Electronique
M. ENJALBERT	Chimie
M. MARTY	Physique Industrielle
M. LEFEUVRE	Electronique
M. ANGELINO	Génie Chimique
M. DABOSI	Métallurgie

MAITRES DE CONFERENCES

M. MATHIEU	Chimie Analytique
M. TRANNOY	Physique
M. CASTAGNETTO	Mathématiques
M. GILOT	Génie Chimique
M. CALMON	Techniques Agricoles
M. MATHEAU	Electronique

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. NOAILLES	Informatique
-------------------	--------------

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE TOULOUSE

PROFESSEURS

M. ROQUES	Chimie Industrielle
M. GRATELOUP	Génie Electrique
M. MASO	Génie Civil
M. MIRA	Génie Electrique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. COLLETTE	Physique
M. FAGET	Physique
M. DURAND Gilbert	Chimie
M. SCHUTTLE	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

M. LETURCQ	Génie Electrique
M. SIRIEYS	Mécanique et Génie Civil
M. BROUSSEAU	Physique

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. LACAZE	Mathématiques
-----------------	---------------

ADMINISTRATION

M. PRINEAU	Secrétaire Général de l'Université Paul Sabatier
------------------	---

A la mémoire de mon frère,

A mes parents.

Nous avons effectué nos recherches dans les laboratoires du Département de Génie Civil de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse.

Nous tenons à exprimer notre profonde et respectueuse gratitude à Monsieur le Professeur FARRAN, Directeur Général de l'Institut National des Sciences Appliquées, qui a bien voulu nous accueillir dans ses laboratoires et nous faire le grand honneur de présider notre Jury.

C'est sous la direction de Monsieur le Professeur MASO, Directeur du Département de Génie Civil de l'Institut National des Sciences Appliquées, que nous avons travaillé. Après nous avoir inspiré cette étude, il nous a permis de mener à bien nos travaux en nous prodiguant sans cesse ses conseils éclairés et ses encouragements.

Nous lui en sommes très profondément reconnaissant.

Leur compétence toute particulière dans le domaine de la Mécanique des Matériaux nous a incité à demander à Monsieur L'HERMITE, Directeur Général Scientifique et Technique de l'Union Technique Interprofessionnelle des Fédérations Nationales du Bâtiment et des Travaux Publics, à Monsieur HABIB, Directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique et à Monsieur ABSI, Délégué Général Scientifique du Centre Expérimental de Recherches et d'Etudes du Bâtiment et des Travaux Publics, de bien vouloir examiner notre travail.

Nous leur savons gré de nous avoir fait part de leurs précieuses observations. Nous mesurons l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de faire partie de notre Jury d'examen et nous les en remercions très respectueusement.

Nous avons apprécié l'aide très cordiale de nos camarades de laboratoire.

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA MICROMECHANIQUE
DES MATERIAUX GRANULAIRES COHERENTS.
APPLICATION AUX BETONS.

S O M M A I R E

INTRODUCTION

P R E M I E R E P A R T I E

ETUDE DU COMPORTEMENT D'UN MODELE THEORIQUE
DE MATERIAU GRANULAIRE COHERENT,
DANS LE DOMAINE REVERSIBLE.

I - REALISATION EXPERIMENTALE D'UN CHAMP HOMOGENE DE CONTRAINTES PLANES EN TRACTION BIAXIALE.

I -1. Conception de la machine d'essais de traction biaxiale.

I -11. Définition de la machine optimale.

I -12. Analyse des appareillages déjà réalisés.

I -13. Conception et description d'une nouvelle machine
d'essais.

I -2. Définition d'un échantillon optimal en traction biaxiale.

I -21. Influence du nombre de points d'application de
l'effort de traction sur chacun des bords de
l'échantillon.

I -22. Etude des modèles cruciformes à angles vifs.

I -23. Etude des modèles cruciformes encochés.

II - DETERMINATION THEORIQUE DES ETATS DE CONTRAINTES DANS LE MODELE
ELEMENTAIRE. CAS DE LA MATRICE HOMOGENE.

II -1. Formulation mathématique des conditions aux limites.

II -11. Adhérence.

II -12. Non-adhérence.

II -2. Détermination des états de contraintes dans le modèle.
Cas de l'adhérence.

II -21. Etat de contraintes dans la matrice.

II -22. Etat de contraintes dans la singularité.

II -3. Détermination des états de contraintes dans le modèle
Cas de la non-adhérence.

II -31. Etat de contraintes dans la matrice.

II -32. Etat de contraintes dans la singularité.

II -33. Calcul des coefficients A_{2n} et détermination
numérique des contraintes.

II -4. Conclusions.

III - ANALYSE EXPERIMENTALE DES ETATS DE CONTRAINTES DANS LE MODELE
ELEMENTAIRE SOUMIS A UNE SOLLICITATION DE TRACTION BIAXIALE.
CAS DE LA MATRICE HOMOGENE.

III -1. Méthode expérimentale.

III -11. Description des échantillons.

III -12. Paramètres des essais.

III -2. Résultats expérimentaux.

III -21. Influence des caractéristiques mécaniques de
la singularité.

III -22. Influence de l'existence de la liaison matrice-singularité.

III -3. Conclusions.

IV - ETUDE DU COMPORTEMENT REVERSIBLE DU MODELE ELEMENTAIRE LORSQUE LA MATRICE EST HOMOGENE.

IV -1. Méthode expérimentale.

IV -11. Caractéristiques des échantillons.

IV -12. Principe de la mesure.

IV -2. Résultats expérimentaux.

IV -21. Etats de déformations et de contraintes dans la singularité.

IV -22. Etats de déformations et de contraintes dans la matrice.

IV -23. Conclusions. Définition d'un "seuil d'hétérogénéité".

IV -3. Conclusions.

DEUXIEME PARTIE

ETUDE DU COMPORTEMENT DU MODELE ELEMENTAIRE A LA LIMITE DU DOMAINE DE REVERSIBILITE. APPLICATION AUX MORTIERS ET BETONS.

V - GENERALITES ET METHODE D'ETUDE.

V -1. Méthode d'étude.

V -11. Définition de l'état limite réversible en un point.

V -12. Définition de la frontière du domaine de réversibilité.

V -13. Paramètres étudiés.

V -2. Résultats.

V -21. Influence de la nature de la singularité.

V -22. Influence de la condition de liaison.

V -23. Influence de la nature du critère.

VI - CAS PARTICULIER DES MORTIERS ET BETONS. DEFINITION D'UN CRITERE DE REVERSIBILITE POUR LE MODELE THEORIQUE.

VI -1. Allure du convexe critère de réversibilité.

VI -11. Généralités.

VI -12. Conclusions.

VI -2. Allure des figures de fissuration.

VI -21. Cas de la compression monoaxiale.

VI -22. Cas de la compression biaxiale.

VI -23. Cas de la traction lors de sollicitations mono-axiales ou biaxiales.

VI -3. Conclusions et applications.

VI -31. Application à la détermination des processus de fissuration dans le modèle élémentaire lorsque le granulat est rigide et adhérent.

VI -32. Comparaison des résistances à l'état limite réversible des modèles à matrice de mortier et de pâte pure de ciment. Influence de la nature de la singularité.

VI -33. Influence de la nature de la liaison.

VI -34. Conclusions.

TROISIEME PARTIE

INFLUENCE DES INTERFERENCES ENTRE PLUSIEURS SINGULARITES
SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DU MODELE THEORIQUE.
GENERALISATION AU CAS D'UN MODELE POLYGRANULAIRE.

VII - DETERMINATION DES ETATS DE CONTRAINTES ENGENDRES DANS UNE PLAQUE
INFINIE ELASTIQUE PAR UNE DISTRIBUTION ALEATOIRE D'INCLUSIONS
CIRCULAIRES.

VII -1. Définition des facteurs d'influence d'une singularité
sur un champ de contrainte uniforme.

VII -2. Interférences entre les facteurs d'influence dans le cas
de plusieurs singularités.

VII -3. Conclusions. Vérification de la validité de la théorie
des facteurs d'influence.

VII -31. Théorie des potentiels complexes en coordonnées
bipolaires.

VII -32. Théorie des éléments finis.

VII -33. Conclusions.

VIII - ETUDE DU COMPORTEMENT, A LA LIMITE DU DOMAINE DE REVERSIBILITE,
D'UN MODELE DE BETON A PLUSIEURS SINGULARITES. CAS DU MATERIAU
REEL.

VIII -1. Définition des cas fondamentaux de voisinage entre sin-
gularités.

VIII -11. Généralités.

VIII -12. Cas de singularités adhérentes rigides.

VIII -13. Cas de trous libres.

VIII -2. Etude de la distribution des contraintes principales dans chaque type de voisinage.

VIII -21. Cas de granulats adhérents rigides.

VIII -22. Cas de trous libres.

VIII -23. Conclusions.

VIII -3. Etude du comportement à la limite du domaine de réversibilité dans chaque cas de voisinage. Généralisation.

VIII -31. Allure du domaine de réversibilité.

VIII -32. Allure des figures de fissuration.

VIII -4. Conclusions.

CONCLUSIONS

ANNEXES

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

INTRODUCTION

Les facteurs dont dépendent les propriétés mécaniques des matériaux granulaires cohérents, naturels ou élaborés, tels que conglomérats, mortiers, bétons, matériaux composites de résines synthétiques, sont très nombreux et de natures diverses.

Cette grande complexité provient essentiellement de la structure hétérogène de ces solides, constitués de grains enrobés dans une matrice, et rend difficile l'étude de leur comportement qui reste encore mal connu.

On est ainsi amené, pour leur emploi dans la construction, à formuler des hypothèses simplificatrices très éloignées de la réalité. On les considère notamment comme des corps homogènes et isotropes pour leur appliquer, dans les calculs de dimensionnement, les lois de la mécanique des milieux continus.

Cela conduit à surévaluer les coefficients de sécurité et, par conséquent, à réaliser des structures dans lesquelles l'utilisation de la matière n'est pas optimale.

Lorsqu'on veut expliquer le comportement réel de ces matériaux, en particulier les conditions de leur rupture sous l'effet de sollicitations variées, externes ou internes, les hypothèses précédemment admises sont insuffisantes et il faut tenir compte effectivement du caractère hétérogène de leur structure.

Si de nombreux chercheurs se sont intéressés aux problèmes de la mécanique des milieux hétérogènes granulaires, peu d'entre eux (1), (2), (3) ont tenu compte des états de contraintes et de déformations locales pour apporter aux phénomènes observés une explication satisfaisante.

C'est pourquoi nous avons consacré notre travail à l'étude de l'influence des perturbations locales, engendrées dans les champs de contraintes et de déformations par les multiples singularités présentes dans ces matériaux, sur le comportement mécanique de ces derniers, d'abord dans le domaine réversible, puis au voisinage de la rupture.

Nous avons pensé qu'il était indispensable, pour définir avec rigueur les critères de réversibilité et les lois de la rupture sous charges extérieures, de connaître le comportement de ces matériaux d'une manière aussi complète que possible et, par conséquent, ne pas restreindre notre étude au seul cas de la sollicitation mono-axiale.

Les conclusions qu'on peut alors tirer d'une telle étude revêtent une grande importance pour les applications pratiques puisqu'elles sont relatives aux effets des efforts multiaxiaux effectivement supportés par les éléments de construction, et qu'elles tiennent compte de la structure réelle des matériaux employés.

Elles doivent ainsi permettre d'améliorer les conditions d'utilisation de ces derniers et notamment entraîner une meilleure définition des coefficients de sécurité et des règlements de calcul.

La grande complexité de la structure interne de ces solides nous interdit l'analyse directe des états de contraintes et de déformations qui s'y développent. Nous avons donc été amené à leur substituer un schéma élémentaire, très simple et tout à fait général de matériau granulaire, qui se prête plus aisément aux calculs mathématiques de la théorie de l'élasticité linéaire.

Nous nous sommes borné, de même, à appliquer aux modèles des sollicitations biaxiales qui, plus faciles à mettre en oeuvre, apportent déjà suffisamment d'éléments pour conclure.

Nous avons ainsi étudié, dans une première partie, les distributions locales de contraintes et de déformations au voisinage d'une inclusion circulaire unique, insérée dans une matrice plane infinie. Nous avons fait varier les caractéristiques mécaniques respectives de la singularité et de la matrice, en distinguant deux cas selon que ces deux phases sont ou non liées.

La seconde partie de notre travail porte sur l'étude du modèle élémentaire au voisinage de la frontière du domaine de réversibilité. L'allure du convexe d'état limite théorique dans le plan R^2 des contraintes extérieures appliquées a été définie dans plusieurs hypothèses de critère. Nous en avons déduit une méthode générale d'étude des critères d'état limite des matériaux granulaires cohérents. Nos conclusions ont été restreintes au cas des mortiers et bétons pour lesquels nous avons montré que le critère d'extension maximale est le seul qui permette d'apporter une explication satisfaisante aux phénomènes observés.

Une troisième partie est consacrée à la généralisation des résultats précédents à un schéma plus complexe, en considérant les interférences des perturbations dues à de multiples singularités.

Dans le cas des mortiers et bétons, toutes les conclusions de la seconde partie, en particulier la validité du critère d'extension maximale, ont pu être étendues au matériau réel.

P R E M I E R E P A R T I E
=====

ETUDE DU COMPORTEMENT D'UN MODELE THEORIQUE
DE MATERIAU GRANULAIRE COHERENT,
DANS LE DOMAINE REVERSIBLE.

L'analyse d'un matériau hétérogène complexe, à deux ou plusieurs phases, présente de nombreuses difficultés que seule une étude statistique permet de résoudre (2). Mais, s'il est possible de définir ainsi certaines caractéristiques mécaniques globales, cette méthode ne peut évidemment pas s'appliquer à l'étude des distributions locales de contraintes et de déformations.

On est amené, dans ce cas, à substituer au matériau réel des schémas théoriques simples qui permettent d'atteindre ces distributions locales par le calcul comme par l'expérience. On peut entreprendre ensuite des études plus complètes, sur des modèles de plus en plus complexes, jusqu'au matériau composite initial.

Nous admettrons, comme l'ont fait pour les mortiers et bétons, DANTU (2) puis, à sa suite, CALVET (3), que les matériaux granulaires cohérents peuvent être, en première approximation, considérés comme des matériaux composites à deux phases homogènes : le liant, d'une part, et les grosses singularités, d'autre part.

Nous avons donc choisi, pour notre étude, un modèle élémentaire de matériau granulaire en traitant le cas d'une singularité circulaire élastique insérée dans une matrice élastique plane.

Outre la simplification qu'elle introduit dans les développements théoriques, la représentation plane est, en effet, la plus compatible avec l'analyse expérimentale précise des états de déformations locales. Elle permet aussi bien l'utilisation des techniques d'extensométrie par jauges de déformation que celles de la photoélasticimétrie par réflexion ou par transmission. C'est ce dernier procédé que nous avons employé pour l'étude expérimentale des modèles à matrice transparente. Nous avons utilisé des extensomètres à fil résistant dans le cas des matrices opaques.

La restriction du problème au cas d'une singularité unique nous a permis de mener à bien la détermination théorique des états de contraintes en tout point du modèle. En effet, dès que le nombre de singularités est égal ou supérieur à deux, on ne connaît pas de solution analytique et seules des méthodes variationnelles peuvent aboutir au calcul numérique, en un nombre limité de points, des composantes des tenseurs contrainte et déformation.

Nous avons fait varier les caractéristiques mécaniques respectives de l'inclusion et de la matrice entre deux cas extrêmes, celui de l'inclusion rigide et celui du trou libre, pour garder aux résultats théoriques obtenus toute leur généralité.

Nous avons également distingué deux types de liaison entre la matrice et la singularité. Dans un premier cas, nous avons supposé que l'inclusion était liée effectivement à la matrice. Cette liaison est appelée "adhérence" (4) dans le cas des mortiers et bétons et nous avons conservé cette terminologie dans notre mémoire. Les déplacements de l'inclusion et de la matrice sont alors égaux à l'interface.

Dans un second cas, nous avons supposé qu'il n'y avait pas de liaison entre la singularité et la matrice. Cela correspond au jeu nul des mécaniciens. Il existe alors deux types de conditions aux limites à l'interface. Sur la partie en contact, elles sont celles de l'adhérence ; sur la partie décollée, elles sont celles d'un bord libre.

Le choix d'une représentation plane pour schématiser les matériaux étudiés restreint la sollicitation multiaxiale à des efforts biaxiaux de traction ou compression, coplanaires avec le modèle.

L'exploration du plan R^2 des contraintes appliquées apporte cependant les éléments essentiels à la détermination du convexe de réversibilité du matériau puisqu'on dispose alors des intersections de ce volume avec les plans de coordonnées.

Nous avons mené nos calculs théoriques en supposant que le modèle était soumis à des sollicitations de traction ou de compression pures et que le champ des contraintes était homogène loin de toute singularité. Il est, dès lors, indispensable pour les vérifications expérimentales de réaliser un dispositif de mise en charge appliquant aux échantillons des sollicitations biaxiales exemptes de tout effort parasite.

Nous avons limité nos investigations pratiques au cas de la traction biaxiale, plus aisée à mettre en oeuvre que la compression. Nous avons considéré que nous pouvions étendre ensuite nos conclusions à tout le plan R^2 des contraintes appliquées sans aucune restriction.

Dans le premier chapitre, nous avons décrit notre dispositif de traction biaxiale.

Dans le second chapitre, nous avons défini les expressions théoriques des composantes du tenseur contrainte en tout point de la matrice, lorsque celle-ci est homogène, et de la singularité, dans le cas de l'adhérence et de la non-adhérence.

Nous avons ensuite comparé les résultats ainsi obtenus à l'état de déformations et de contraintes existant réellement dans le modèle. Cette étude expérimentale fait l'objet du troisième chapitre.

Un quatrième chapitre est consacré à l'étude expérimentale de l'influence de la nature de la matrice, lorsque celle-ci est hétérogène, sur le comportement élastique du modèle.

Nous avons vérifié que les distributions de déformations et de contraintes engendrées par une grosse singularité ne sont pas affectées par l'hétérogénéité de la matrice, tant que le plus gros grain de la matrice reste suffisamment petit par rapport à l'inclusion.

CHAPITRE I

REALISATION EXPERIMENTALE D'UN CHAMP HOMOGENE DE CONTRAINTES PLANES EN TRACTION BIAXIALE

Lorsqu'on pratique des essais mécaniques de matériaux, il convient de s'assurer que deux conditions essentielles sont remplies.

La première concerne le dispositif de mise en charge qui ne doit pas introduire de sollicitation parasite.

La seconde se rapporte au champ de contraintes obtenu dans l'échantillon, qui doit être égal à celui qu'on souhaite réaliser sur une zone suffisamment étendue pour que les observations et les mesures effectuées soient significatives.

Nous avons choisi d'appliquer à nos modèles une sollicitation de traction biaxiale. Dans ce cas le champ de contraintes doit être uniforme, en l'absence d'inclusion, dans tout l'échantillon ou, du moins, sur une zone suffisamment étendue par rapport à la zone de perturbation qui apparaît autour de la singularité lorsque celle-ci est introduite.

La seconde condition n'est alors pas la conséquence directe de la première et elle n'est pas aussi aisée à satisfaire que semblent le permettre les lois de l'élasticité. En effet, la recherche de champs uniformes très étendus nous impose de travailler dans un voisinage très immédiat des points d'application des charges.

Le principe de de SAINT-VENANT n'est plus alors vérifié et nous devons déterminer la forme des échantillons à utiliser pour obtenir un champ d'expérimentation aussi pur et étendu que possible.

Nous présentons, dans ce chapitre, les solutions technologiques que nous avons mises au point pour résoudre ces deux problèmes dans le cas de la traction biaxiale.

I -1. CONCEPTION DE LA MACHINE D'ESSAIS DE TRACTION BIAXIALE.

I -11. Définition de la machine optimale.

Le tenseur contrainte $T (M)$ en tout point du modèle doit être défini par :

$$T (M) = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} \text{ avec } t = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad \sigma_2 < \sigma_1$$

t pouvant prendre toutes les valeurs réelles du segment $(0,1)$.

La machine d'essais doit, pour cela, satisfaire aux impératifs ci-après.

- Les deux efforts de traction sont appliqués à l'échantillon suivant deux axes de chargement rigoureusement perpendiculaires entre eux et coplanaires avec l'échantillon.

- Chaque effort de traction est régulièrement réparti sur le bord de l'échantillon, sans engendrer de contraintes tangentielles de frottement au sein de la matière.

- Le point d'intersection des deux axes de chargement doit rester confondu avec le centre de l'échantillon à tous les stades de la déformation. Ceci permet, en effet, d'éviter un excentrement de la charge qui aurait pour conséquence d'introduire, d'une part, des couples de flexion dans le plan de la plaque et, d'autre part, des contraintes de cisaillement au contact entre chaque mors et l'échantillon.

Cette dernière condition exclut donc tout dispositif pour lequel les deux systèmes orthogonaux de traction ne seraient pas indépendants. Ils ne pourraient plus, en effet, s'adapter progressivement à la déformation de l'échantillon.

I -12. Analyse des appareillages déjà réalisés.

Nous nous sommes borné à l'étude de machines d'essais satisfaisant aux conditions énoncées dans le paragraphe précédent.

I -121. Appareillage de G.W.D. VILE (5).

Le centrage de la charge est obtenu par l'action simultanée de quatre vérins s'appuyant sur un même cadre octogonal. Cette machine, essentiellement conçue pour la compression biaxiale, se prête également à des combinaisons d'essais de traction, de compression et de torsion, deux à deux.

Les vérins utilisés dans chaque direction de chargement doivent être rigoureusement identiques pour éviter le moindre excentrement de la charge. Cette solution introduit, par ailleurs, une interaction entre les quatre vérins par l'intermédiaire du cadre. Ceci peut engendrer des efforts de flexion parasites lorsque des charges importantes sont appliquées à l'éprouvette.

I -122. Appareillage de K.J. PASCOE et J.W.R. DE VILLIERS (6).

Son principe est identique à celui de l'appareillage précédent. Cette machine a été essentiellement conçue pour des essais de fatigue en traction biaxiale.

I -123. Appareillage de H. FESSLER et J.K. MUSSON (7).

Ce dispositif comporte quatre vérins indépendants assemblés sur un même bâti cruciforme.

L'échantillon est alors disposé dans un plan parallèle à celui du bâti. Il existe donc un excentrement permanent de l'ensemble des tractions par rapport au plan de l'échantillon, ce qui introduit un effort de flexion dans le plan perpendiculaire à celui de la plaque.

I -124. Conclusions.

Nous ne pouvons retenir aucun des dispositifs précédents. L'analyse que nous venons de mener montre, en effet, que le champ de contraintes qu'ils engendrent dans l'échantillon n'est pas exempt de flexions parasites.

Il est donc nécessaire que nous concevions une nouvelle machine d'essais.

I -13. Conception et description d'une nouvelle machine d'essais.

Notre appareillage doit satisfaire les conditions nécessaires précédemment définies. En outre, il est indispensable qu'il se prête aisément aux exigences de la mesure expérimentale : permettre l'installation des divers appareillages d'extensométrie habituellement utilisés dans les laboratoires, des bancs de photoélasticimétrie les plus élaborés en particulier.

En ce qui concerne la photoélasticimétrie par transmission, cela impose que les dispositifs de traction soient placés dans un plan vertical sans entraver le champ de vision à travers le plan de l'échantillon.

Nous avons, bien entendu, choisi le parti d'une machine de poids et d'encombrement minima, qui allie à une grande souplesse d'utilisation un faible prix de revient.

I -131. Bâti de mise en charge.

Il se compose de deux appareillages de traction indépendants, perpendiculaires entre eux, coplanaires avec l'échantillon.

Chaque bâti est constitué d'un premier mors, fixe dans la direction de chargement, et d'un second mors, mobile, guidé suivant l'axe de chargement par une douille à circulation de billes, et relié par une rotule à une vis sans fin qui applique l'effort de traction.

Chaque bâti est libre de se mouvoir globalement, sans frottement, dans la direction perpendiculaire à l'effort qu'il exerce, assurant ainsi en permanence, tout au long de la déformation de l'échantillon, le centrage des efforts.

Les deux bâtis sont assemblés sur un même cadre rectangulaire, rigide, métallique, par l'intermédiaire de rails de glissement à galets croisés qui assurent à chaque appareillage de traction un mouvement sans frottement.

Le cadre métallique a été dimensionné de telle sorte que, sous l'effet des efforts de traction mis en oeuvre pour notre expérimentation sur des plaques de matière plastique minces, on puisse le consi-

MACHINE DE TRACTION BIAXIALE
SCHEMA DE PRINCIPE

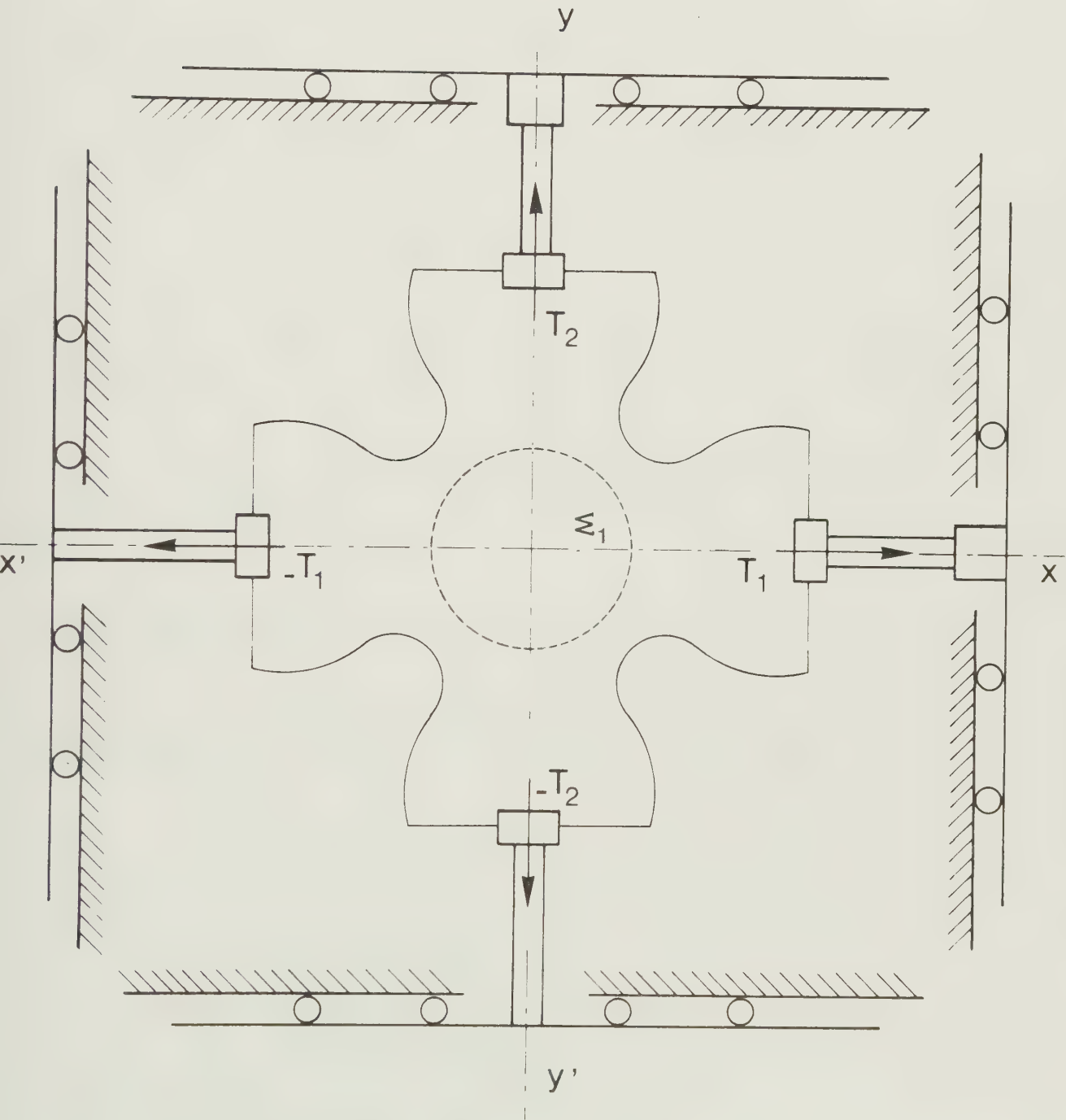


FIG. I-1

dérer comme infiniment rigide par rapport aux échantillons. Aucune interaction ne se manifeste ainsi entre les deux systèmes de chargement.

I -132. Mors de traction.

Ils sont constitués d'un assemblage claveté de bielles qui répartissent régulièrement les efforts de traction sur chaque bord de l'échantillon.

On évite ainsi tout glissement longitudinal de celui-ci lors de la mise en charge.

I -133. Mesure des efforts.

Nous avons utilisé des capteurs de force disposés sur chaque axe de chargement, entre la vis de mise en charge et le mors mobile.

L'ensemble mobile formé par le capteur de force, le mors de traction et la vis de chargement est équilibré par un contre-poids, de manière à éviter l'apparition de couples de flexion dus au poids propre de ces éléments.

Nous pouvons ainsi exercer des efforts de traction mesurés avec une grande précision. Chaque capteur permet de déterminer la force de traction avec une précision relative de 1/1000.

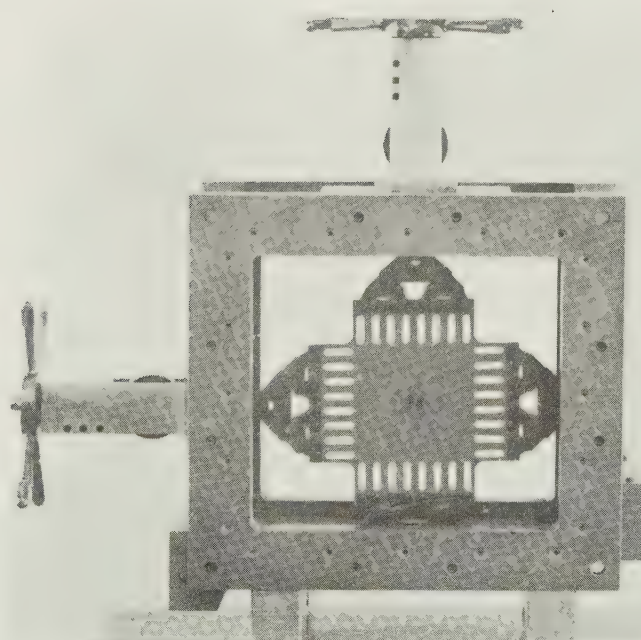
Les plans de la machine réalisée sont représentés sur les figures I-3 et I-4. Les caractéristiques de ce prototype sont les suivantes :

- dimensions hors-tout	:	830 x 830 mm ²
- effort maximal	:	1000 daN
- poids	:	80 daN
- épaisseur maximale des échantillons	:	5 mm
- dimensions maximales des échantillons	:	270 x 270 mm ²

MACHINE DE TRACTION BIAXIALE



a) et b) Mors de traction



MACHINE DE TRACTION BIAXIALE

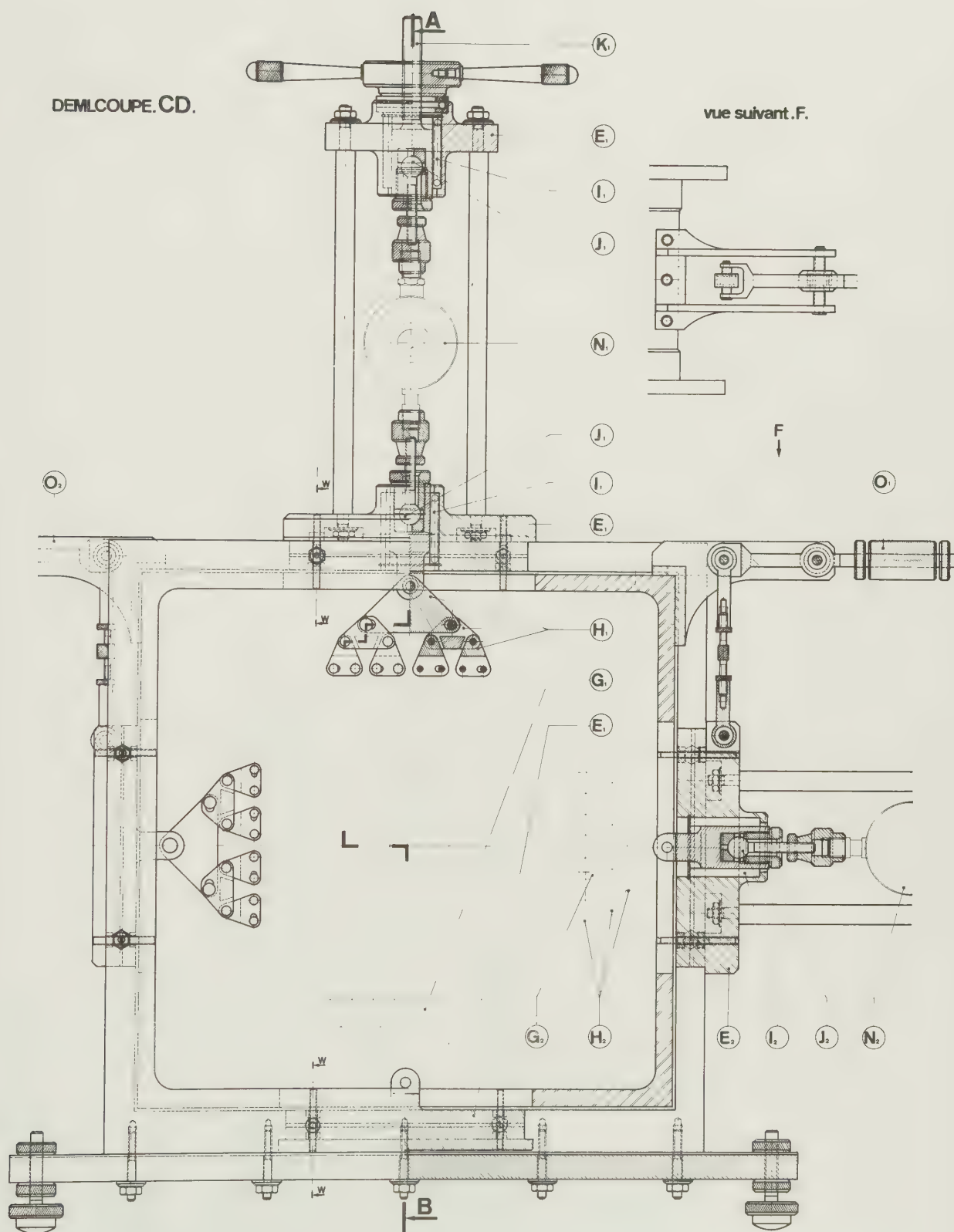


FIG. I - 3

DEMI.COUBE.AB.

COUPE LOCALE .W.W.

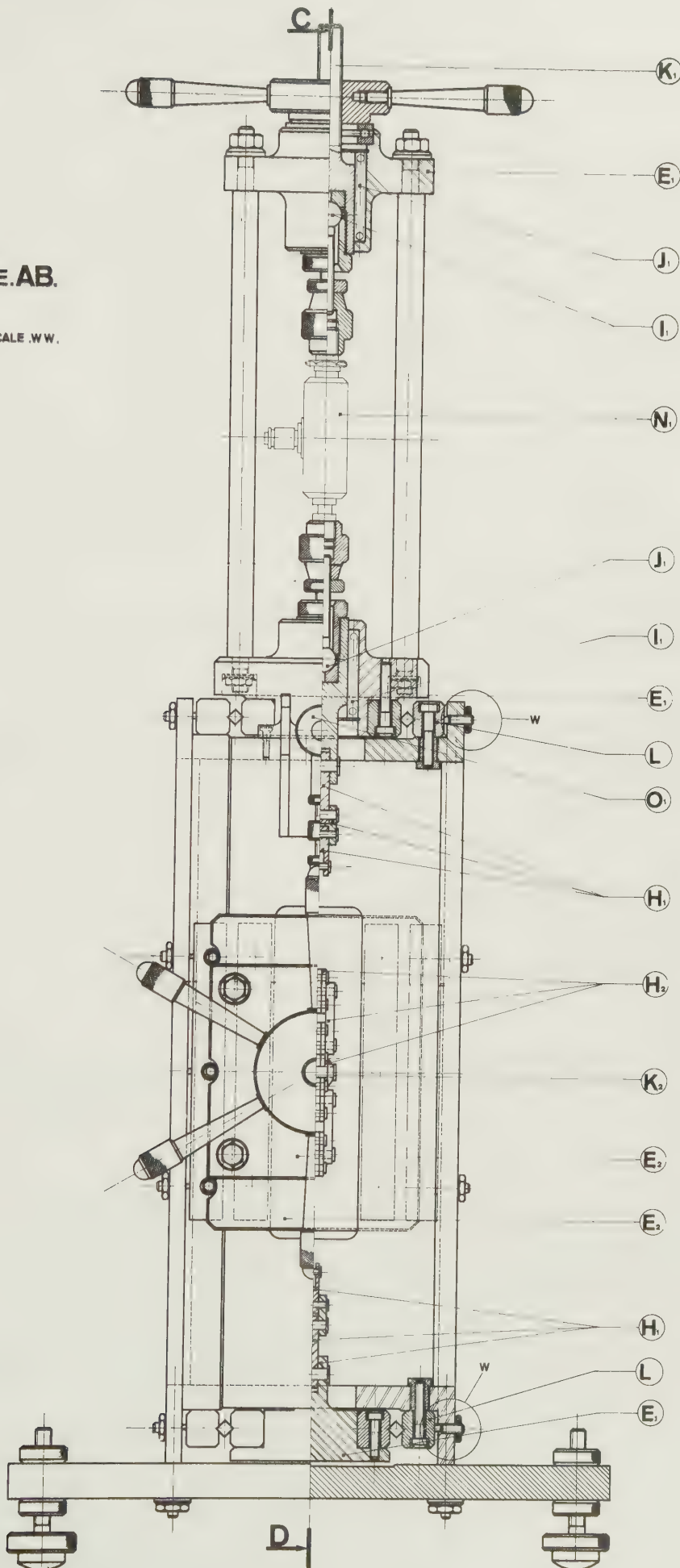


FIG. I-4

I - 134. Nomenclature (Plans).

- E. Système de traction
- G. Mors de traction
- H. Bielles
- I. Douille à circulation de billes
- J. Rotule
- K. Vis de chargement
- L. Glissière à galets croisés
- N. Capteur de force
- O. Contrepoids

I - 2. DEFINITION D'UN ECHANTILLON OPTIMAL EN TRACTION BIAXIALE.

Nous avons caractérisé chaque échantillon, étudié en photoélasticité plane par transmission, par son rendement q exprimé en pourcentage, tel que :

$$q = \frac{\Sigma_1}{\Sigma}$$

avec :

- Σ_1 aire réelle de la zone homogène du champ des contraintes.
- Σ aire théorique maximale de la zone homogène du champ des contraintes.

Il convient de remarquer que l'aire Σ n'est pas forcément égale à l'aire totale, S , du modèle. Nous avons, entre ces deux aires, la relation suivante :

$$\Sigma < S$$

Nous avons étudié les variations du rendement pour des modèles de contour géométrique simple. Parmi ceux-ci, les échantillons carrés ou rectangulaires à bords de chargement rectilignes et perpendiculaires aux charges se prêtent le mieux à l'expérience.

Le rendement de chaque modèle apparaît alors comme une fonction réelle de variables réelles multiples.

$$q = q \left(\frac{b}{a_1}, \frac{h}{a_2}, n, g \right)$$

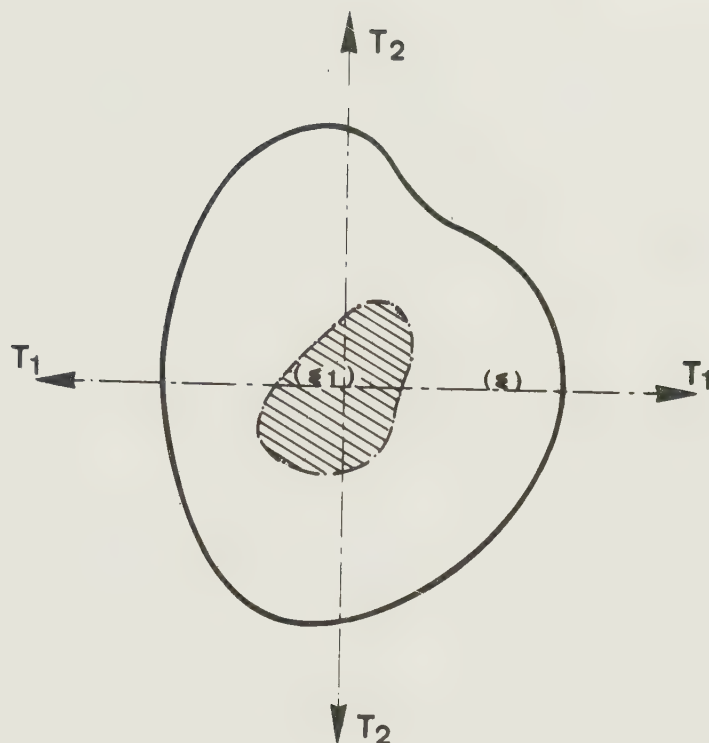


FIG. I.- 5

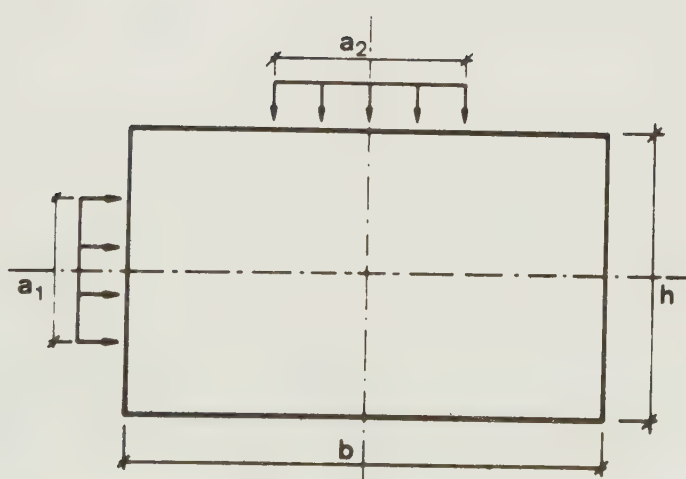


FIG. I- 6

avec :

- h hauteur hors-tout du modèle,
- b largeur hors-tout du modèle,
- a_i ($i = 1, 2$), longueurs des bords de chargement,
- n nombre de points d'application de l'effort de traction sur chacun des bords de l'échantillon
- g géométrie du modèle.

Nous avons cherché à définir les valeurs de ces paramètres pour lesquelles le rendement est maximal.

I -21. Influence du nombre de points d'application de l'effort de traction sur chacun des bords de l'échantillon.

Nous avons mené notre étude sur un modèle carré. Dans ce cas :

$$q = \frac{\Sigma_1}{a^2}, \quad S = \Sigma = a_1^2 = a_2^2 = a^2$$

g est constante, n est variable, $\frac{h}{a_2}$ et $\frac{b}{a_1}$ sont égaux à 1.

$$q = q(n)$$

q est une fonction croissante de n, comme le montrent les résultats expérimentaux ci-après, obtenus à l'étreinte sur un modèle carré de côté a égal à 11 cm.

$$n = 2 \quad q(2) = 4 \%$$

$$n = 4 \quad q(4) = 10 \%$$

$$n = 8 \quad q(8) = 23 \%$$

Toutefois, si n devient infiniment grand, le rendement ne tend pas vers 100 %.

En effet, si le mors de traction et le modèle sont usinés dans le même matériau, tout se passe comme si les deux pièces étaient collées. La géométrie du modèle est alors changée puisqu'un modèle carré se transforme ainsi en un modèle cruciforme et n a en fait diminué.

Si, au contraire, le mors et le modèle sont réalisés dans deux matériaux différents, l'apparition de contraintes tangentielles au contact, dues aux différences de caractéristiques mécaniques des deux matériaux, abaisse considérablement le rendement de l'échantillon.

Il faut donc que les charges soient appliquées en un nombre fini de points afin que la discontinuité au contact entre les bords de l'échantillon et les mors de traction soit effective. Cette conclusion conditionne la nature des mors et, pour la satisfaire, nous avons choisi de les réaliser au moyen d'un système de biellettes triangulées (Fig. I-2a et I-2b).

Il résulte cependant de ce mode d'application des charges, l'apparition d'une zone perturbée à la périphérie du modèle. Le dispositif d'accrochage des mors de traction crée, en effet, une zone de compression (Fig. I-7) en arrière des points de contact entre les mors et le modèle. On peut pallier cet inconvénient en rejetant cette zone perturbée loin du centre de l'échantillon.

Nous sommes ainsi conduit à réaliser une génération de modèles cruciformes pour obtenir des rendements plus importants.

I -22. Etude des modèles cruciformes à angles vifs (n et g constants).

Nous avons distingué deux cas selon que le rapport des tractions appliquées est égal à l'unité ou non.

Nous avons étudié, dans chaque cas, des modèles à bords de chargement égaux.

I -221. Cas de l'étreinte $T_1 = T_2$.

b et h sont égaux par raison de symétrie évidente.

q est alors fonction du rapport $\frac{b}{a}$.

Cette fonction passe par un maximum ainsi que le montrent les résultats expérimentaux ci-après, obtenus avec $a = 11$ cm.

$$\frac{b}{a} = 1,0 \qquad q(1,0) = 23 \%$$

$$\frac{b}{a} = 1,5 \qquad q(1,5) = 42 \%$$

$$\frac{b}{a} = 2,0 \qquad q(2,0) = 62 \%$$

$$\frac{b}{a} = 3,5 \qquad q(3,5) = 4 \%$$

MODELE CARRE
PERTURBATION DU CHAMP DES CONTRAINTES

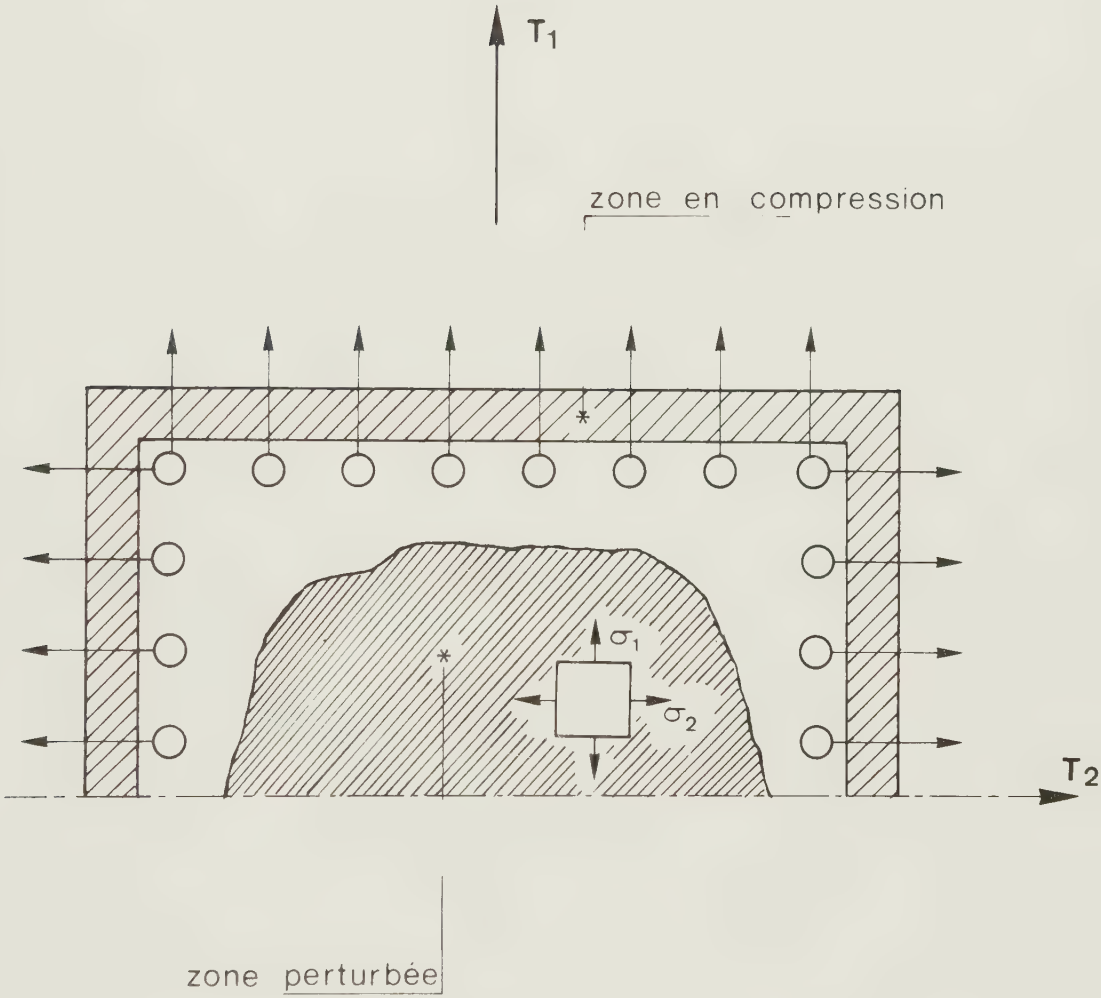


FIG. I - 7

MODELE CRUCIFORME A ANGLES VIFS

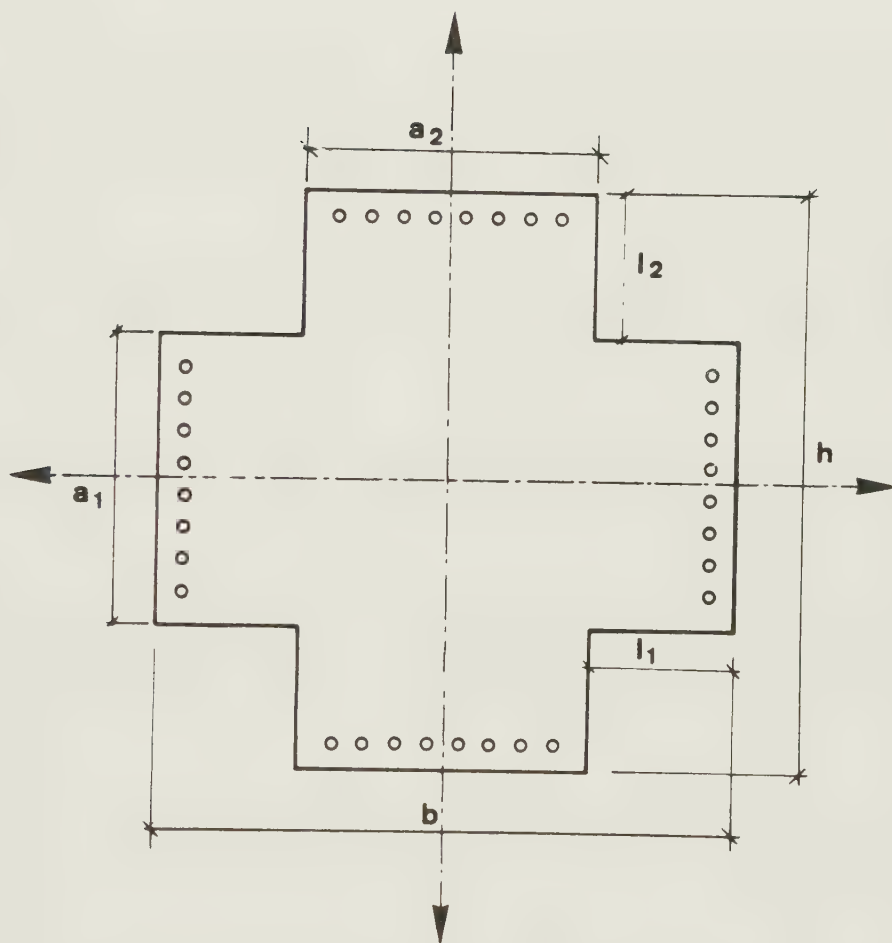


FIG. I - 8

I -222. Cas général $T_1 \neq T_2$.

Le modèle n'est alors plus symétrique. Nous avons étudié les variations du rendement en fonction du rapport l_1/l_2 , a étant constant, pour chaque valeur du rapport T_1/T_2 .

Le rendement maximal est obtenu dans chaque cas pour :

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (\text{Fig. I-9})$$

L'angle vif de la croix engendre une perturbation d'effet de pointe qui limite les valeurs des rendements maxima. Pour remédier à cet inconvénient, il convient d'encoher l'échantillon entre les bords de la croix, les modèles à rayons de raccordement ne donnant pas satisfaction.

Nous construisons ainsi, à deux dimensions, un modèle analogue aux échantillons habituellement utilisés en traction mono-axiale.

I - 23. Modèles cruciformes encochés. ($\frac{b}{a}$ et n constants, g variable).

Nous avons mené nos essais à partir du modèle à contour symétrique ($b = h$), en étudiant des encoches symétriques, circulaires, dans le cas de l'étreinte et dissymétriques, elliptiques, dans le cas général.

I -231. Cas de l'étreinte $T_1 = T_2$. (encoche circulaire).

Le rendement de l'échantillon passe par un maximum lorsque la dimension de l'échancrure varie. Ce maximum est atteint pour une encoche circulaire dont l'emprise sur chaque bord est limitée à 15 % de a .

La figure I-12 représente les résultats expérimentaux obtenus.

MODELE CRUCIFORME A ANGLES VIFS
CARACTERISTIQUES OPTIMALES EN FONCTION DE $\frac{T_2}{T_1}$

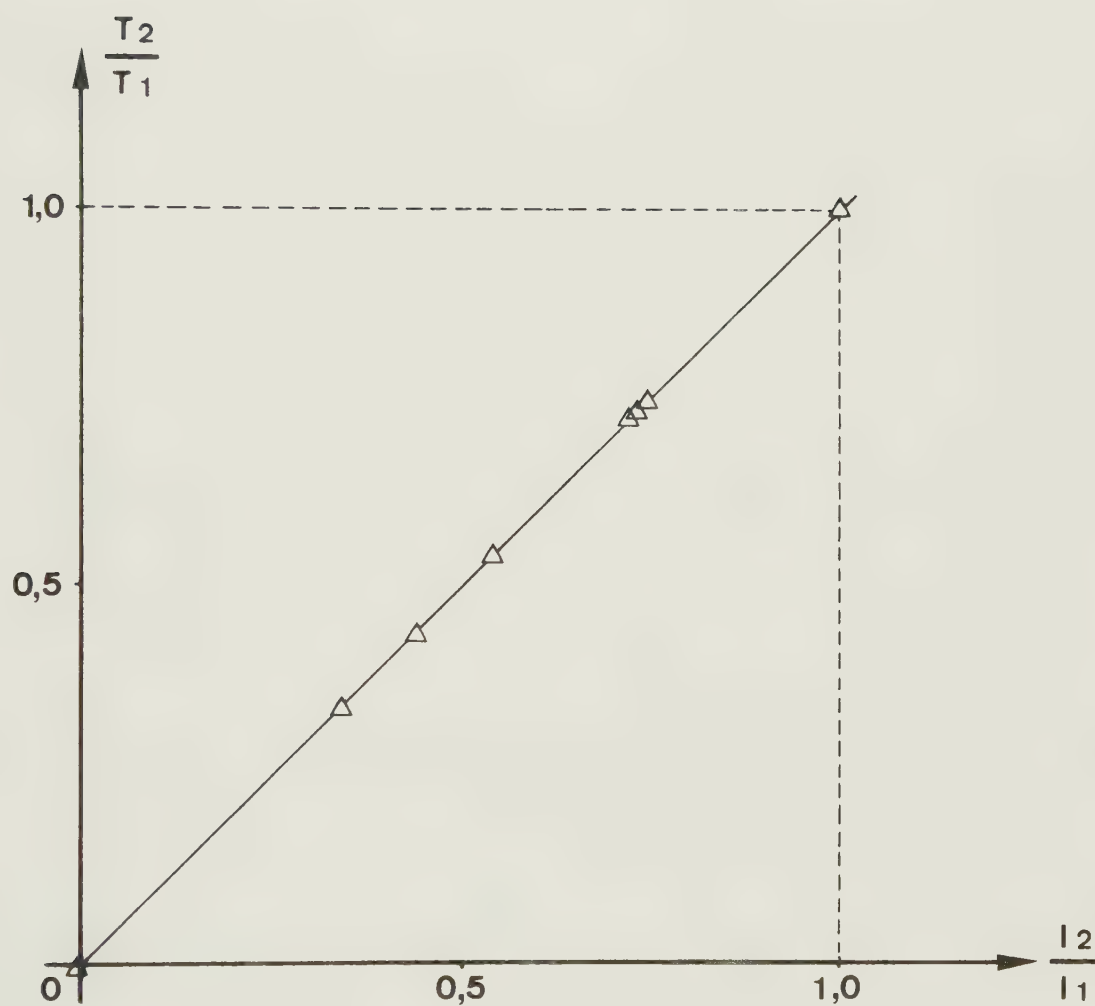


FIG. 1-9

MODELE CRUCIFORME A RAYONS DE RACCORDEMENT

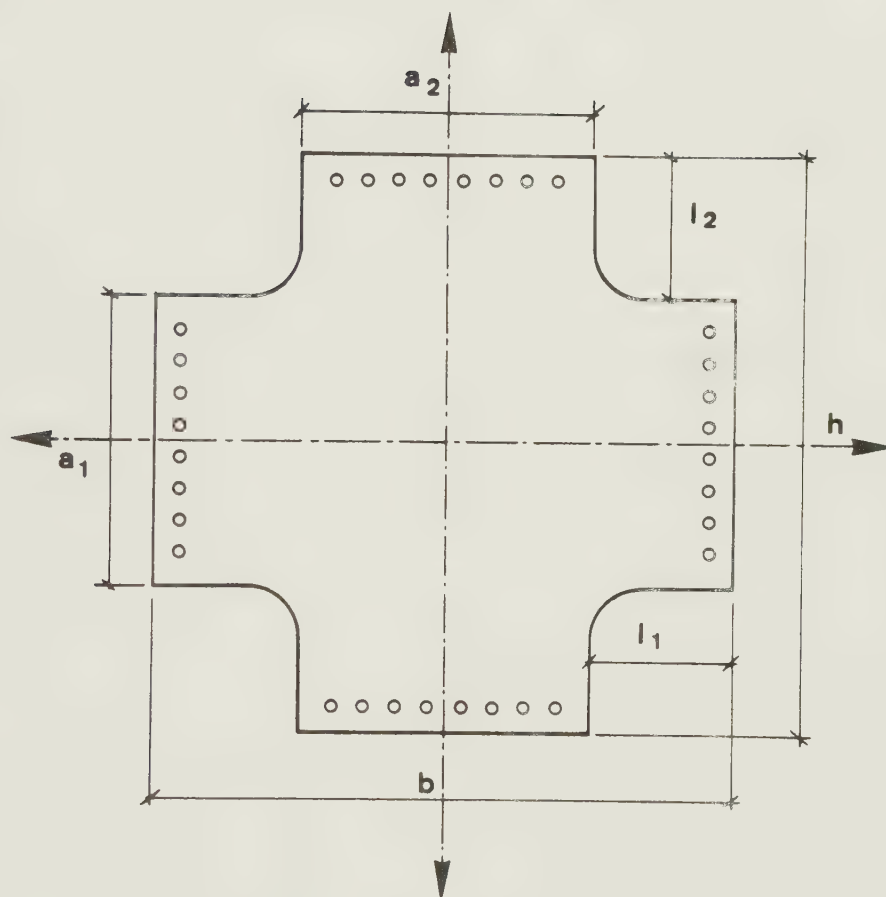


FIG. I - 10

MODELE CRUCIFORME ENCOCHE

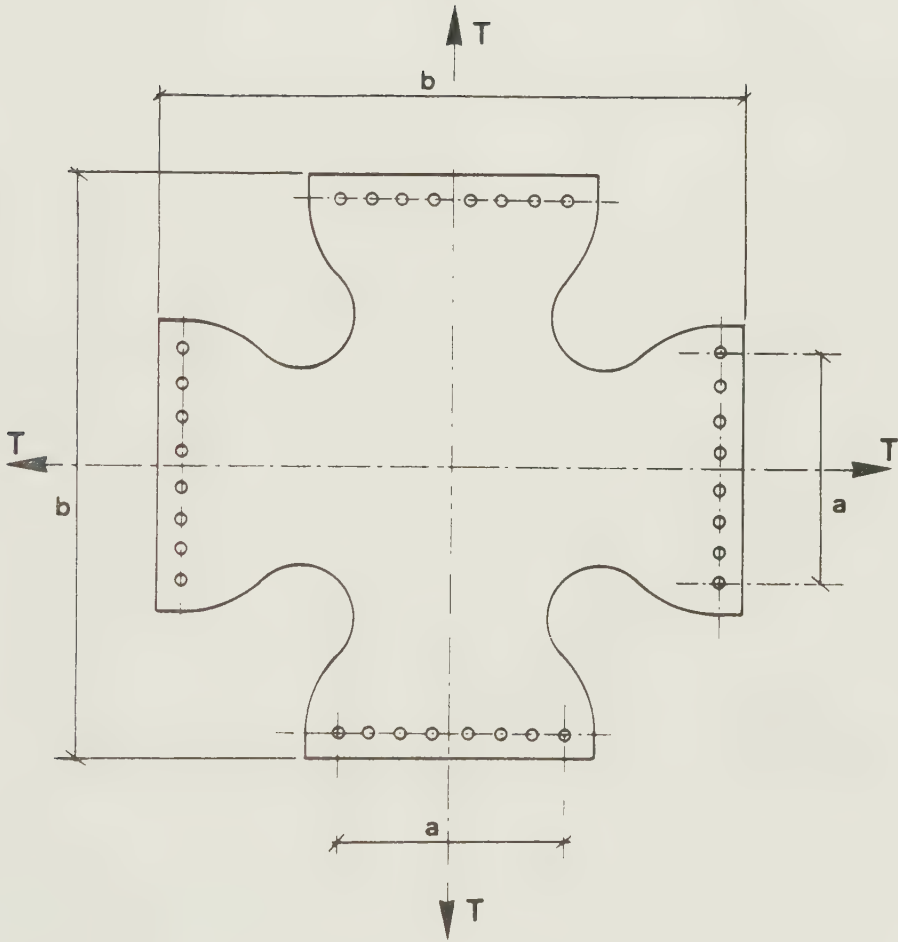


FIG. I - 11

MODELE CRUCIFORME ENCOCHE

Rendement en fonction de la géométrie de l'encoche

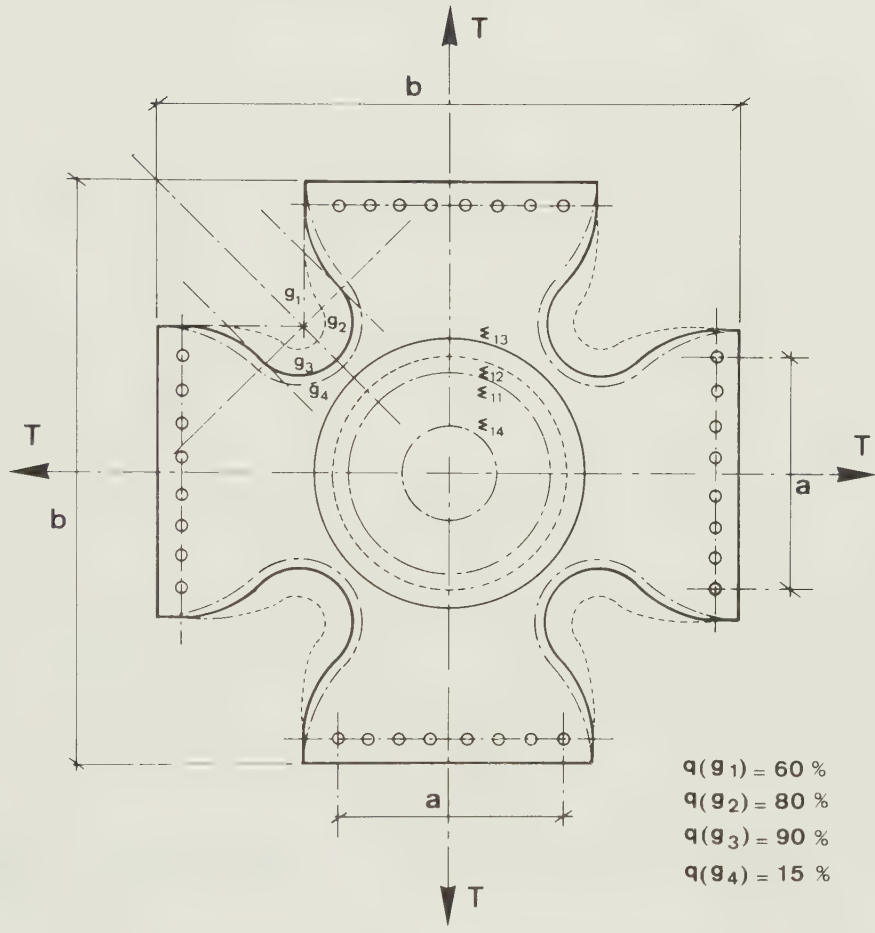


FIG. I -12

I -232. Cas général $T_1 \neq T_2$ (encoche elliptique).

Les modèles sont obtenus en encochant l'angle vif suivant le réseau des isostatiques au voisinage du contour. La forme de l'encoche est approximativement elliptique. Le rapport c du grand axe de l'ellipse au petit axe est voisin de $(T_1/T_2)^2$ lorsque le rendement est maximal, comme le montrent les résultats expérimentaux ci-après.

T_1/T_2	c	$\sqrt{c}$
1,0	1,0	1,0
1,25	1,50	1,25
1,35	1,75	1,32
1,40	2,0	1,41
1,50	2,25	1,50

Les rendements obtenus sont voisins de 80 %.

L'utilisation de modèles cruciformes encochés nous permet donc d'obtenir des rendements élevés. Cependant la géométrie optimale n'est définie que pour une valeur précise du rapport des tractions appliquées à l'échantillon, ce qui impose un nombre important de modèles dès lors qu'on veut étudier tout le quadrant de la traction biaxiale dans le plan R^2 des contraintes appliquées.

Une solution indépendante du rapport T_1/T_2 a été proposée par MONCH et GALSTER (8) pour tenter d'augmenter le rendement des modèles cruciformes à angles vifs.

Son principe consiste à introduire au sein du modèle une succession d'évidements identiques et régulièrement disposés, constituant une série de bielles sollicitées en traction monoaxiale.

Ce modèle se comporte comme un modèle carré qui serait sollicité sur ses quatre côtés par des efforts de traction, régulièrement répartis, sans qu'il existe de zone de compression au voisinage du bord du carré.

Le rendement maximal obtenu est de 60 %, quelles que soient les valeurs des tractions appliquées à l'échantillon.

MODELE DE MÖNCH & GALSTER

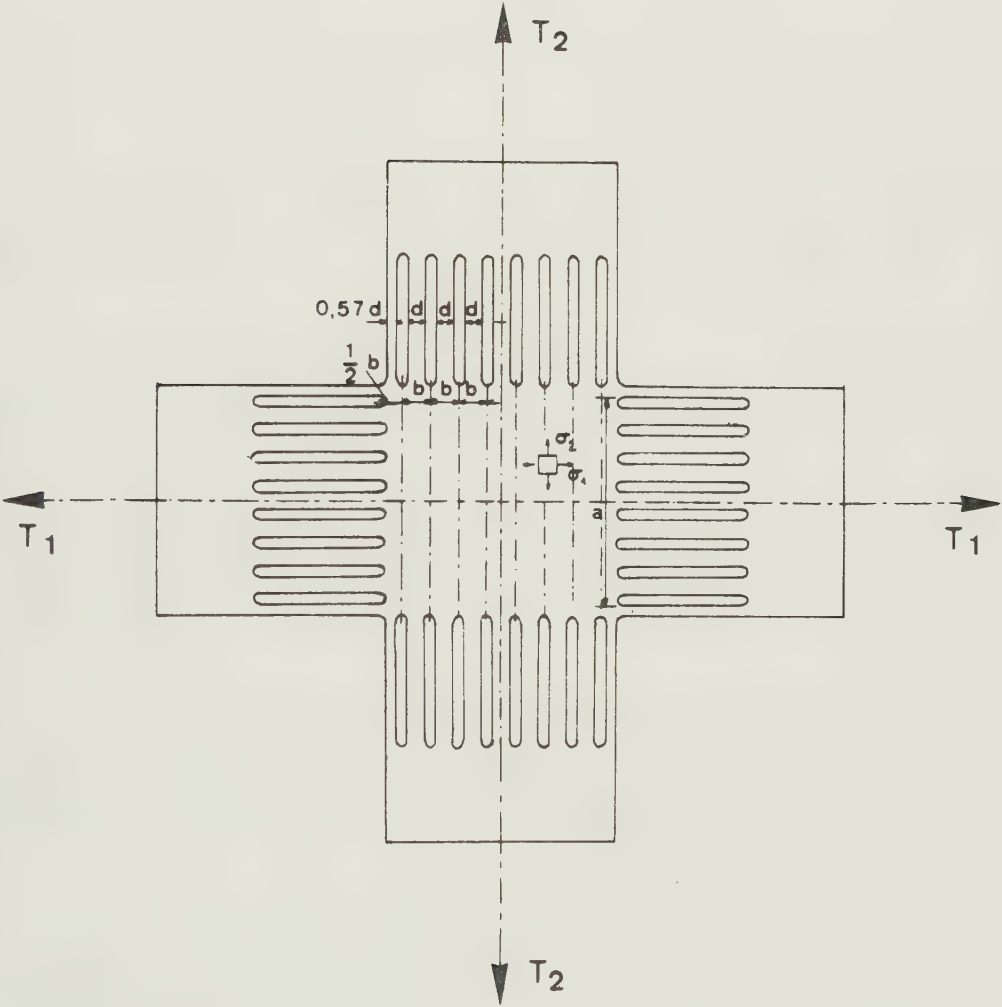


FIG. I - 13

CHAPITRE II

DETERMINATION THEORIQUE DES ETATS DE CONTRAINTES
DANS LE MODELE ELEMENTAIRE. (CAS DE LA MATRICE HOMOGENE)

Le problème de la déformation élastique d'une plaque indéfinie dans laquelle est insérée une inclusion n'a pu être résolu analytiquement que dans de très rares cas particuliers et nous devons, en général, nous contenter de solutions numériques approchées.

Lorsque l'inclusion est circulaire, les développements mathématiques de la théorie de l'élasticité sont considérablement simplifiés par l'emploi de la variable complexe, associée à un système de coordonnées polaires (9).

La forme de la solution dépend de la nature de la condition de liaison entre le granulat et la matrice, les conditions aux limites infinies de la plaque étant invariantes pour l'ensemble des problèmes de ce type.

Dans le cas du béton, FARRAN a montré (4) que la liaison, lorsqu'il y a adhérence, est du type solide-solide. Les déplacements du granulat et du liant à l'interface sont alors égaux. Cette condition à la limite est comparable à la soudure des mécaniciens.

Lorsque la liaison n'est pas effective, soit que l'adhérence ait été rompue sous l'effet de sollicitations mécaniques, soit que le processus précédemment analysé (4) n'ait pu se produire en raison de la nature des matériaux en présence, certains points de la matrice peuvent être en contact avec l'inclusion, les autres en sont éloignés. Nous dirons, dans ce cas, que la singularité est non-adhérente. Nous avons alors idéalisé le comportement du modèle en ramenant le problème à l'étude de la déformation élastique d'une plaque trouée dans laquelle est insérée une inclusion circulaire, introduite initialement sans jeu ni frottement.

Dans ce chapitre, nous avons d'abord formulé mathématiquement ces deux conditions de liaison, en démontrant, dans le cas de la non-adhérence, l'existence d'un arc en contact avec la singularité et d'un arc décollé.

Nous avons ensuite déterminé les composantes du tenseur contrainte en tout point de la matrice et de l'inclusion, en généralisant, par application du principe de superposition, la solution analytique proposée par MUSKHELISVILI (10) pour une inclusion adhérente lorsque la plaque est soumise à une sollicitation monoaxiale.

Dans le cas de la non-adhérence, nous avons repris les hypothèses d'ASTRE (11) en les appliquant au cas de la sollicitation biaxiale.

Les représentations graphiques des variations théoriques des états de contraintes seront données dans le chapitre suivant, en même temps que celles des variations relevées expérimentalement.

Notations et indices

Les constantes, les caractéristiques mécaniques (Module d'YOUNG, coefficient de POISSON...), les composantes des tenseurs contrainte et déformation affectées de l'indice "0" sont relatives à la singularité. Non indicées, ces mêmes quantités sont relatives à la matrice.

Ces indices pourront toutefois être omis par la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible.

MODELE ELEMENTAIRE
SCHEMA THEORIQUE ET NOTATIONS

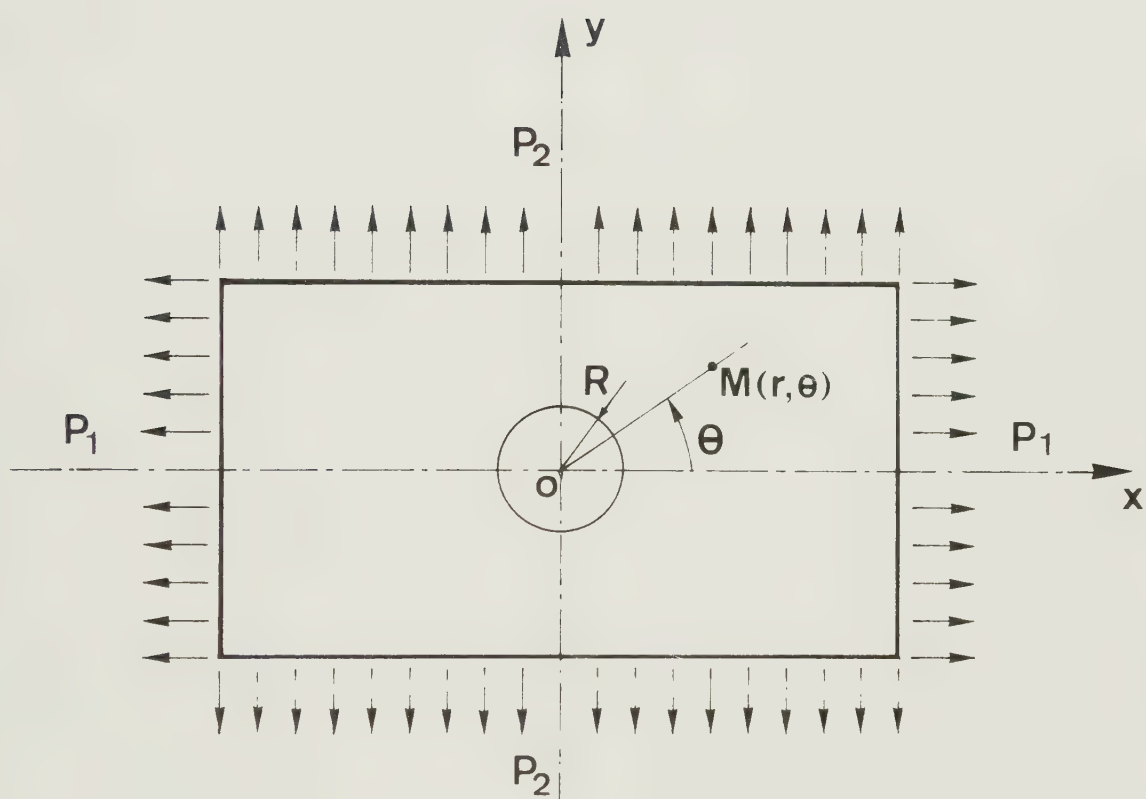


FIG. II - 1

II -1. FORMULATION MATHÉMATIQUE DES CONDITIONS AUX LIMITES.

II -11. Adhérence.

Les déplacements de l'inclusion et de la matrice sont égaux à l'interface. Cette condition se traduit, en élasticité en coordonnées polaires, par les relations ci-après.

$$\forall M \in \Gamma \quad \begin{cases} u_r(M) = u_{or}(M) \\ u_\theta(M) = u_{o\theta}(M) \end{cases}$$

avec : Γ contour de la singularité,
 u_r déplacement radial,
 u_θ déplacement tangentiel.

Dans le cas particulier où l'inclusion est rigide, elles deviennent :

$$\forall M \in \Gamma \quad \begin{cases} u_r(M) = 0 \\ u_\theta(M) = 0 \end{cases}$$

Aux conditions en déplacements s'ajoutent celles de continuité en contraintes :

$$\forall M \in \Gamma \quad \begin{cases} \sigma_r(M) = \sigma_{or}(M) \\ \tau_{r\theta}(M) = \tau_{or\theta}(M) \end{cases}$$

Dans le cas particulier où la matrice est infiniment rigide par rapport à l'inclusion, ces conditions deviennent :

$$\forall M \in \Gamma \quad \begin{cases} \sigma_r(M) = 0 \\ \tau_{r\theta}(M) = 0 \end{cases}$$

Ce sont les mêmes, à la limite, que dans le cas du trou libre.

II -12. Non-adhérence.

Les déplacements radiaux, à l'interface, de l'inclusion et de la matrice sont égaux lorsqu'il y a contact (11). Nous appellerons Γ_1 l'ensemble de ces points de contact, communs à la singularité et à la matrice.

Lorsque celle-ci est décollée de l'inclusion, les conditions aux limites de la matrice ou de la singularité, à l'interface, sont celles du bord libre.

Nous appellerons Γ_2 et Γ_2' les ensembles des points appartenant respectivement à la matrice et à la singularité, à l'interface, dans les zones de décollement.

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \quad \text{sur le contour de l'inclusion}$$

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2' = \Gamma' \quad \text{sur le bord du trou percé dans la matrice}$$

$$\Gamma = \Gamma' \quad \text{avant déformation}$$

Les conditions aux limites se traduisent alors par les relations ci-après.

$$\forall M_1 \in \Gamma_1 \quad \begin{cases} u_r(M_1) = u_{or}(M_1) \\ \sigma_r(M_1) = \sigma_{or}(M_1) \end{cases}$$

$$\forall M_2 \in \Gamma_2 \quad \tau_{or\theta}(M_2) = \sigma_{or}(M_2) = 0$$

$$\forall M_2' \in \Gamma_2' \quad \tau_{r\theta}(M_2') = \sigma_r(M_2') = 0$$

Nous avons supposé que le contact entre la singularité et la matrice est sans frottement, lorsqu'il existe. Alors :

$$\forall M \in \Gamma \quad \tau_{r\theta}(M) = 0$$

Il convient de remarquer que cette hypothèse n'est satisfaite, dans la réalité physique, qu'à l'intersection de l'interface avec les axes de symétrie du modèle.

Par ailleurs, nous ne connaissons pas la distribution géométrique des points de contact à l'interface, et il est nécessaire d'en étudier la topologie pour les développements ultérieurs des calculs.

II -121. Etude de la topologie du contact.

Nous avons étudié l'état de déformations d'une plaque percée d'un trou, soumise à une sollicitation biaxiale dans son plan.

Cela nous a permis, en effet, de définir, en première approximation, la répartition des points de contact entre l'inclusion et la matrice et de préciser l'évolution de la topologie du contact en fonction de la sollicitation appliquée.

Cette analyse ne deviendra rigoureuse que lorsque nous ferons intervenir les caractéristiques mécaniques de la singularité, ainsi que nous l'exposerons dans la dernière partie de ce chapitre.

Le problème a été résolu analytiquement par de nombreux auteurs en traction monoaxiale (9) ou biaxiale (12) et nous connaissons le déplacement radial en tout point du bord libre du trou.

Nous avons pris, par convention, les tractions positives.

Lorsque le déplacement radial est positif, la matrice s'éloigne du centre du trou et cela correspond à un décollement. S'il est négatif, la matrice se rapproche du centre du trou et cela correspond à une zone de contact.

L'étude de la topologie du contact se ramène donc à l'étude du signe de $u_r(M)$ le long du bord libre du trou.

$$u_r(M) = \frac{\kappa + 1}{8\mu} R \left[p_1 + p_2 + 2 (p_1 - p_2) \cos 2\theta \right], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

avec :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$$

E et ν étant des caractéristiques élastiques de la matrice,

R étant le rayon du trou,

p_1 et p_2 sont les contraintes appliquées à la plaque, à l'infini, respectivement dans les directions Ox et Oy (Fig. II-1), comptées positivement lorsqu'il s'agit de tractions.

Le signe de $u_r(M)$ est le même que celui de l'expression entre crochets puisque κ , μ et R sont des quantités positives. Il suffit d'étudier le signe de cette expression lorsque p_1 et p_2 varient.

A un coefficient positif près on a :

$$u_r(M) = p_1 + p_2 + 2 (p_1 - p_2) \cos 2\theta$$

soit :

$$u_r(M) = p_1 [1 + t + 2 (1 - t) \cos 2\theta]$$

avec :

$$t = \frac{p_2}{p_1}$$

On voit que $u_r(M)$ est une fonction monotone de θ dans l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Pour que $u_r(M)$ soit de même signe que p_1 , il suffit donc que :

pour $\theta = 0$ $1 + t + 2 (1 - t) \geq 0 \rightarrow t \leq 3$

pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ $1 + t - 2 (1 - t) \geq 0 \rightarrow t \geq \frac{1}{3}$

En conséquence, si t varie dans l'intervalle $[1/3, 3]$ on a une adhérence parfaite ou un décollement entre l'inclusion et la matrice suivant que p_1 est positif ou négatif.

Pour les autres valeurs de t , $u_r(M)$ change de signe lorsque θ varie entre 0 et $\pi/2$ quelle que soit la valeur de p_1 .

Il existe alors deux arcs de la matrice en contact avec l'inclusion et deux arcs qui en sont décollés.

Nous avons appelé α l'angle de décollement, ou de rupture de contact entre l'inclusion et la matrice. Nous avons pu constater numériquement, ainsi que nous l'exposerons par la suite, qu'il est compris entre 60° et 90° .

II -122. Formulation générale des conditions aux limites

En résumé, à l'interface singularité-matrice, nous pouvons définir les conditions aux limites par les conditions ci-après.

Traction biaxiale

$$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+, \frac{p_1}{p_2} \leq 3 \quad \forall M \in \Gamma, \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \begin{cases} \sigma_r(\theta) = 0 \\ \tau_{r\theta}(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+, \frac{p_1}{p_2} > 3, \exists \alpha_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] :$$

$$\forall \theta \in \left[0, \alpha_1\right[, \sigma_r(\theta) = \tau_{r\theta}(\theta) = 0$$

$$\forall \theta \in \left]\alpha_1, \frac{\pi}{2}\right] , \begin{cases} u_r(\theta) = u_{or}(\theta) \\ \tau_{r\theta}(\theta) = 0 \\ \sigma_r(\theta) = \sigma_{or}(\theta) \end{cases}$$

Compression biaxiale

$$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^-, \frac{p_1}{p_2} \leq 3, \forall M \in \Gamma, \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \begin{cases} u_r(\theta) = u_{or}(\theta) \\ \tau_{r\theta}(\theta) = 0 \\ \sigma_r(\theta) = \sigma_{or}(\theta) \end{cases}$$

$$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^-, \frac{p_1}{p_2} > 3, \exists \alpha_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] :$$

$$\forall \theta \in \left[0, \alpha_2\right[, \begin{cases} u_r(\theta) = u_{or}(\theta) \\ \tau_{r\theta}(\theta) = 0 \\ \sigma_r(\theta) = \sigma_{or}(\theta) \end{cases}$$

$$\forall \theta \in \left]\alpha_2, \frac{\pi}{2}\right] , \quad \sigma_r(\theta) = \tau_{r\theta}(\theta) = 0$$

Sollicitation biaxiale mixte

$$\forall (p_1, p_2) \in R^+, R^-, \quad |p_1| \geq |p_2|, \quad \exists \alpha_3 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] :$$

$$\forall \theta \in \left[0, \alpha_3\right[\quad , \quad \sigma_r(\theta) = \tau_{r\theta}(\theta) = 0$$

$$\forall \theta \in \left]\alpha_3, \frac{\pi}{2}\right] \quad , \quad \begin{cases} u_r(\theta) = u_{or}(\theta) \\ \sigma_r(\theta) = \sigma_{or}(\theta) \\ \tau_{r\theta}(\theta) = 0 \end{cases}$$

II -2. DETERMINATION DES ETATS DE CONTRAINTES DANS LE MODELE.
CAS DE L'ADHERENCE.

Les équations ci-après définissent, en coordonnées polaires, les composantes du tenseur contrainte en tout point du modèle. La solution théorique du problème est obtenue en appliquant le principe de superposition aux résultats donnés par MUSKHELISHVILI (10) pour une sollicitation monoaxiale.

II -21. Etat de contraintes dans la matrice.

$$\sigma_r(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} \left(1 - \gamma \frac{R^2}{r^2}\right) + \left(1 - 2\beta \frac{R^2}{r^2} - 3\delta \frac{R^4}{r^4}\right) \frac{p_1 - p_2}{2} \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} \left(1 + \gamma \frac{R^2}{r^2}\right) - \left(1 - 3\delta \frac{R^4}{r^4}\right) \frac{p_1 - p_2}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta}(M) = - \frac{p_1 - p_2}{2} \left(1 + \beta \frac{R^2}{r^2} + 3\delta \frac{R^4}{r^4}\right) \sin 2\theta$$

β , γ et δ étant des coefficients fonctions des caractéristiques de la singularité et de la matrice :

$$\beta = - \frac{2(\mu_0 - \mu)}{\mu + \mu_0 \kappa}, \quad \gamma = \frac{\mu(\kappa_0 - 1) - \mu_0(\kappa - 1)}{2\mu_0 + \mu(\kappa_0 - 1)}, \quad \delta = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu + \mu_0 \kappa},$$

$$\kappa_0 = \frac{3 - \nu_0}{1 + \nu_0} \quad \mu_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$$

Dans le cas particulier de l'inclusion rigide, les coefficients β , γ et δ prennent les expressions simplifiées ci-après :

$$\beta = -\frac{2}{\kappa}, \quad \gamma = -\frac{\kappa - 1}{2}, \quad \delta = \frac{1}{\kappa}$$

qu'on obtient en faisant tendre le rapport E/E_0 vers l'infini.

Lorsque la matrice est infiniment rigide par rapport à la singularité, le rapport E/E_0 tend vers zéro et on obtient alors :

$$\beta = 2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = -1$$

Ces valeurs caractérisent l'état de contraintes dans une plaque percée d'un trou.

II -22. Etat de contraintes dans la singularité.

$$\sigma_{or}(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} \beta_0 + \frac{p_1 - p_2}{2} \delta_0 \cos 2\theta$$

$$\sigma_{o\theta}(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} \beta_0 - \frac{p_1 - p_2}{2} \delta_0 \cos 2\theta$$

$$\tau_{or\theta}(M) = -\frac{p_1 - p_2}{2} \delta_0 \sin 2\theta$$

$$\text{avec : } \beta_0 = \frac{\mu_0 (\kappa + 1)}{2\mu_0 + \mu(\kappa - 1)} \quad \text{et} \quad \delta_0 = \frac{\mu_0 (\kappa + 1)}{\mu + \mu_0 \kappa}$$

II -3. DETERMINATION DES ETATS DE CONTRAINTES DANS LE MODELE. CAS DE LA NON-ADHERENCE.

Lorsque la sollicitation biaxiale est telle qu'il n'existe pas de point en contact à l'interface, l'état de contraintes est identiquement nul dans la singularité. Dans la matrice, tout se passe comme dans une plaque percée d'un trou :

$$\sigma_r(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{p_1 - p_2}{2} \left(1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{p_1 - p_2}{2} \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta}(M) = - \frac{p_1 - p_2}{2} \left(1 + 2 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4}\right) \sin 2\theta$$

Lorsque la sollicitation biaxiale est telle qu'il existe des points de la singularité en contact avec la matrice à l'interface, l'état de contraintes est défini par les expressions ci-après, obtenues en appliquant le principe de superposition aux résultats donnés par MUSKHELISHVILI.

Dans la matrice :

$$\sigma_r(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} \left(1 - \gamma \frac{R^2}{r^2}\right) + \left(1 - 2\beta \frac{R^2}{r^2} - 3\delta \frac{R^4}{r^4}\right) \frac{p_1 - p_2}{2} \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} \left(1 + \gamma \frac{R^2}{r^2}\right) - \left(1 - 3\delta \frac{R^4}{r^4}\right) \frac{p_1 - p_2}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta}(M) = - \frac{p_1 - p_2}{2} \left(1 + \beta \frac{R^2}{r^2} + 3\delta \frac{R^4}{r^4}\right) \sin 2\theta$$

avec :

$$\beta = 2 \frac{\mu(\kappa_0 + 3) - 2\mu_0}{\mu(\kappa_0 + 3) + \mu_0(3\kappa + 1)}, \quad \gamma = \frac{\mu(\kappa_0 - 1) - \mu_0(\kappa - 1)}{2\mu_0 + \mu(\kappa_0 - 1)}$$

$$\delta = - \frac{\mu(\kappa_0 + 3) + \mu_0(\kappa - 1)}{\mu(\kappa_0 + 3) + \mu_0(3\kappa + 1)}$$

et, dans la singularité :

$$\sigma_{or}(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} \beta_0 + \frac{p_1 - p_2}{2} \delta_0 \cos 2\theta$$

$$\sigma_{o\theta}(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} \beta_0 + \left(6\gamma_0 \frac{r^2}{R^2} - \delta_0 \right) \frac{p_1 - p_2}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{or\theta}(M) = \frac{p_1 - p_2}{2} \left(3\gamma_0 \frac{r^2}{R^2} - \delta_0 \right) \sin 2\theta$$

avec :

$$\beta_0 = \frac{\mu_0(\kappa + 1)}{2\mu_0 + \mu(\kappa_0 - 1)}, \quad \gamma_0 = \frac{2\mu_0(\kappa + 1)}{\mu(\kappa_0 + 3) + \mu_0(3\kappa + 1)}$$

$$\delta_0 = \frac{6\mu_0(\kappa + 1)}{\mu(\kappa_0 + 3) + \mu_0(3\kappa + 1)}$$

Pour les autres valeurs des contraintes p_1 et p_2 appliquées, nous sommes en présence de deux arcs en contact et de deux arcs décollés.

Nous avons proposé une solution numérique approchée en développant la contrainte normale, au contact entre la matrice et l'inclusion, en polynôme trigonométrique à nombre fini de termes.

Cette méthode a été utilisée par ASTRE (11) pour résoudre un problème analogue en traction monoaxiale.

II -31. Etat de contraintes dans la matrice.

Soient $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ les potentiels complexes (9), (10) de l'état de contraintes dans la matrice. Nous les supposons développables en séries de LAURENT.

$$\Phi(z) = \sum_0^{\infty} a_k z^{-k}, \quad \Psi(z) = \sum_0^{\infty} a'_k z^{-k}, \quad a_k, a'_k \in \mathbb{C}$$

Les potentiels complexes sont reliés à l'état de contraintes en un point par les relations ci-après :

$$(1) \quad \sigma_r(M) + \sigma_\theta(M) = 4\mathcal{R}(\Phi(z))$$

$$(2) \quad \sigma_\theta(M) - \sigma_r(M) + 2i\tau_{r\theta}(M) = 2 [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] e^{2i\theta}$$

$$(3) \quad 2\mu [u_r(M) + iu_\theta(M)] = e^{-2i\theta} \left(\kappa \int \Phi(z) dz - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\Psi(z)} \right)$$

d'où nous pouvons déduire : (1) - (2)

$$(4) \quad \sigma_r(M) - i\tau_{r\theta}(M) = \Phi(z) + \overline{\Psi(z)} - e^{2i\theta} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]$$

Cette relation nous permet, en séparant les parties réelles et imaginaires, de calculer les contraintes normales et les cisaillements à partir des potentiels complexes.

σ_r et $\tau_{r\theta}$ apparaissent ainsi comme sommes de séries de termes généraux :

$$\sigma_r = \sum (a'_{k+2} r^{-k-2} + ka_k r^{-k} - 2a_k r^{-k}) \cos k\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \sum (-a'_{k+2} r^{-k-2} + ka_k r^{-k}) \sin k\theta$$

La considération des conditions aux limites nous permet de calculer les termes a_k et a'_k .

Conditions à l'interface

$$\sigma_r(M) = \sum_0^\infty A_{2n} \cos 2n\theta, \quad ,$$

suivant l'hypothèse que nous avons énoncée. Les termes impairs sont nuls par raison de symétrie. Nous avons limité le nombre des termes de ce polynôme trigonométrique lors du calcul numérique des coefficients.

$$\tau_{r\theta}(M) = 0, \quad ,$$

suivant l'hypothèse de non frottement.

Conditions à l'infini

Lorsque r croît indéfiniment, nous pouvons écrire, en contraintes, dans la matrice :

$$r \gg R, \theta = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r(M) = p_1 \\ \sigma_\theta(M) = p_2 \\ \tau_{r\theta}(M) = 0 \end{array} \right.$$

$$r \gg R, \theta = \frac{\pi}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r(M) = p_2 \\ \sigma_\theta(M) = p_1 \\ \tau_{r\theta}(M) = 0 \end{array} \right.$$

Les conditions en contraintes à l'interface nous permettent de calculer, par identification, les termes généraux des séries de LAURENT. Les conditions à l'infini nous donnent les premiers termes de ces séries.

Après réduction, il vient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k} = \frac{A_{2k}}{2} R^{2k}, \quad a_{2k+1} = 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a'_{2k} = (k-1)R^{2k}A_{2k-2}, \quad a'_{2k+1} = 0$$

$$a_0 = \frac{p_1 + p_2}{4}, \quad a'_0 = \frac{p_2 - p_1}{4}$$

$$a_2 = \frac{R^2}{2} (A_2 + p_2 - p_1), \quad a'_2 = \frac{R^2}{2} (p_1 + p_2 - 2A_0)$$

$$a_4 = \frac{R^4}{2} A_4, \quad a'_4 = \frac{R^4}{2} [2A_2 + 3(p_2 - p_1)]$$

Alors :

$$\Phi(z) = \frac{p_1 + p_2}{4} + \frac{R^2}{2} (A_2 + p_2 - p_1) z^{-2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} R^{2n} A_{2n} z^{2n}$$

$$\Psi(z) = \frac{p_2 - p_1}{4} + \frac{R^2}{2} \left(\frac{p_1 + p_2}{2} - A_0 \right) - \cos 2\theta \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \frac{p_1 - p_2}{2} +$$

$$\dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n}}{r^{2n}} A_{2n} \left[1 + n \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \right] \cos 2n\theta$$

et les composantes du tenseur contrainte s'expriment par les relations ci-après :

$$\sigma_r(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{R^2}{r^2} \left(\frac{p_1 + p_2}{2} - A_0 \right) + \cos 2\theta \left(1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \frac{p_1 - p_2}{2}$$

$$\dots + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n}}{r^{2n}} A_{2n} \left[1 - n \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \right] \cos 2n\theta$$

$$\sigma_\theta(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{R^2}{r^2} \left(\frac{p_1 + p_2}{2} - A_0 \right) - \cos 2\theta \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \frac{p_1 - p_2}{2}$$

$$\dots + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n}}{r^{2n}} A_{2n} \left[1 + n \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \right] \cos 2n\theta$$

$$\tau_{r\theta}(M) = \frac{p_1 - p_2}{2} \left(1 - 2 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta + \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{R^{2n}}{r^{2n}} A_{2n} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin 2n\theta$$

Nous pouvons également donner les expressions des déplacements radiaux et tangentiels qui serviront ultérieurement à l'écriture des conditions aux limites, à l'interface, exprimées en déplacements.

$u_r(M)$ et $u_\theta(M)$ sont obtenus en remplaçant $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ par leurs expressions respectives dans l'équation (3) du II-31.

$$2\mu u_r(M) = \frac{p_1 + p_2}{4} (\kappa - 1) r + \frac{R^2}{2r} (p_1 + p_2 - 2A_0) + \cos 2\theta \left[\frac{R^2}{r} (1 + \kappa) + \right.$$

$$\left. \dots r - \frac{R^4}{r^3} \right] \frac{p_1 - p_2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left[- \frac{R^{2n}}{r^{2n-1}} \left(\frac{\kappa}{2(2n-1)} + \frac{1}{2} \right) + \frac{R^{2n+2}}{r^{2n+1}} \cdot \frac{n}{2n+1} \right] \cos 2n\theta$$

$$2\mu u_\theta(M) = -\sin 2\theta \left[\frac{R^4}{r^3} + \frac{R^2}{r} (\kappa - 1) + r \right] \frac{p_1 - p_2}{2} +$$

$$\dots \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left[\frac{R^{2n}}{2r^{2n-1}} \left(\frac{\kappa}{2n-1} - 1 \right) + \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{R^{2n+2}}{r^{2n+1}} \right] \sin 2n\theta$$

Les coefficients inconnus A_{2n} peuvent être ensuite déterminés par les conditions aux limites : en déplacements sur l'arc en contact, en contrainte normale sur l'arc décollé.

$$\forall M \in \Gamma'_2 \quad (\text{arc décollé}) \quad \sigma_r(M) = \sum_0^{\infty} A_{2n} \cos 2n\theta = 0$$

$$\forall M \in \Gamma_1 \quad (\text{arc en contact}) : u_r(M) = u_{or}(M)$$

II -32. Etat de contraintes dans la singularité.

La méthode de résolution est identique à celle du II-31. Nous supposons les potentiels complexes développables en séries de LAURENT.

$$\Phi_0(z) = \sum_0^{\infty} a_{0k} z^k, \quad \Psi_0(z) = \sum_0^{\infty} a'_{0k} z^k, \quad a_{0k}, a'_{0k} \in \mathbb{C}$$

Les termes de ces séries s'expriment alors, en vertu de la nature des conditions aux limites, par les relations ci-après.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{02k} = \frac{A_{2k}}{2R^{2k}}, \quad a_{02k+1} = 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a'_{02k} = -\frac{k+1}{R^{2k}} A_{2k+2}, \quad a'_{02k+1} = 0$$

et :

$$a_{00} = \frac{A_0}{2}, \quad a_{01} = 0$$

$$a'_{00} = A_2, \quad a'_{01} = 0$$

d'où :

$$\sigma_{or}(M) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^{n-1} \cdot \left[\frac{r^2}{R^2} (1 - n) + n \right] \cos 2n\theta$$

$$\sigma_{o\theta}(M) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^{n-1} \cdot \left[\frac{r^2}{R^2} (1 + n) - n \right] \cos 2n\theta$$

$$\tau_{or\theta}(M) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^{n-1} \cdot n \left[\frac{r^2}{R^2} - 1 \right] \sin 2n\theta$$

$$u_{or}(M) = \frac{R}{4\mu_0} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \left(\frac{\kappa_0}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} \right) \cos 2n\theta$$

II -33. Calcul des coefficients A_{2n} et détermination numérique des contraintes.

Les conditions écrites au II -31. deviennent :

$$\forall M \in \Gamma_2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \cos 2n\theta = 0$$

$$\forall M \in \Gamma_1 \quad \frac{p_1 + p_2}{2} (\kappa - 1) + p_1 + p_2 - 2A_0 + \cos 2\theta (1 + \kappa)(p_1 - p_2)$$

$$\dots - \frac{\mu}{\mu_0} A_0 (\kappa_0 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left[-\frac{\kappa}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{\mu}{\mu_0} \left(\frac{\kappa_0}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} \right) \right] = 0$$

en remplaçant $u_r(M)$ et $u_{or}(M)$ par leurs expressions en fonction des A_{2n} .

L'ensemble de ces équations forme un système d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues que sont les A_{2n} .

Pour résoudre un tel système, nous avons limité le nombre des inconnues, la convergence des séries étant vérifiée a posteriori sur les valeurs des coefficients A_{2n} .

En écrivant les deux équations en sommes de nombre fini de termes pour un nombre de valeurs de l'angle θ égal au nombre de coefficients inconnus A_{2n} , on forme un système de CRAMER. Les valeurs de θ sont choisies d'une manière régulière dans l'intervalle de décollement

et dans l'intervalle de contact.

Il est donc indispensable que la résolution du système soit entreprise après la détermination de l'angle de décollement.

II -331. Détermination de l'angle de décollement.

Nous calculons l'angle de décollement α par approximations successives, à partir d'une valeur arbitrairement choisie dans son intervalle de définition.

La résolution du système de CRAMER précédent, avec une valeur arbitraire de α , permet de calculer les $A_{2n}(\alpha)$, $\sigma_r(\alpha)$, $\sigma_\theta(\alpha)$ et $\tau_{r\theta}(\alpha)$. De même nous connaissons $u_r(\alpha)$ et $u_\theta(\alpha)$.

La valeur de α n'est acceptable que si les coefficients $A_{2n}(\alpha)$ rendent les séries convergentes : ils doivent donc décroître, en valeur absolue, vers zéro. Par ailleurs, nous devons trouver un déplacement radial positif sur l'arc Γ_2' de la matrice. Sur l'arc de contact Γ_1 , la contrainte radiale doit être une compression dans le cas de la traction biaxiale et une traction dans le cas de la compression biaxiale.

La représentation des variations de σ_r , σ_θ et de u_r nous permet donc de déterminer, à un ou deux degrés près, la valeur de l'angle de décollement α .

Nous avons mené nos calculs sur un ordinateur IBM 7044 en limitant les développements en série à trente termes.

L'angle de décollement est alors défini à moins de deux degrés, et les coefficients A_{2n} sont calculés avec une incertitude relative de 2 %.

II -332. Calcul numérique des états de contraintes dans le modèle.

Ils résultent directement du calcul des sommes des séries dont nous connaissons les coefficients dès lors que l'angle de décollement est déterminé.

Les programmes de traitement des systèmes linéaires et du calcul des sommes des séries trigonométriques sont donnés en annexe.

II -4. CONCLUSIONS.

Nous n'avons formulé aucune hypothèse restrictive quant à la nature des matériaux en présence (matrice ou singularité) ni dans le cas de l'adhérence, ni dans celui de la non-adhérence.

Les résultats que nous avons établis sont directement applicables à tout matériau granulaire cohérent, schématisé en une matrice élastique plane dans laquelle est insérée une singularité circulaire élastique.

CHAPITRE III

ANALYSE EXPERIMENTALE DES ETATS DE CONTRAINTES DANS LE MODELE ELEMENTAIRE
SOUMIS A UNE SOLLICITATION DE TRACTION BIAXIALE
(CAS DE LA MATRICE HOMOGENE).

Il nous a paru indispensable de compléter l'étude théorique précédente par l'analyse expérimentale des états de déformations et de contraintes réellement engendrés dans une plaque par une singularité circulaire isolée.

La nature des hypothèses que nous avons formulées, les approximations des procédés de résolution que nous avons utilisés, notamment dans le cas de l'inclusion non-adhérente, sont, en effet, autant de facteurs dont il convient de vérifier la validité.

Nous rapportons, dans ce chapitre, les résultats des expériences que nous avons réalisées sur ce sujet.

III -1. METHODE EXPERIMENTALE.

Nous avons analysé nos modèles en photoélasticité plane par transmission. La comparaison directe des valeurs théoriques et expérimentales de $\sigma_1 - \sigma_2$, de l'orientation du repère principal et des valeurs des contraintes principales loin de la singularité, permet d'éviter la séparation des contraintes en tout point du champ étudié et allège ainsi considérablement la technique expérimentale.

III -11. Description des échantillons.

Les perturbations engendrées par une singularité dans le champ des contraintes de la matrice restent localisées au voisinage immédiat de la singularité. Dès que la distance polaire r dépasse quatre fois le rayon R de l'inclusion, on peut considérer que le champ des contraintes n'est plus perturbé. Au-delà, tout se passe comme si nous nous trouvions à l'infini par rapport à la singularité.

Nous avons choisi de mener nos expériences avec des singularités de diamètre 12 mm et 20 mm. On peut alors tracer les réseaux d'isochromes avec une bonne précision, compte-tenu de la largeur des franges obtenues.

Il convient, dès lors, que la zone uniforme du champ des contraintes soit d'environ $12 \times 12 \text{ cm}^2$ de surface pour que les conditions aux limites, expérimentales et théoriques, soient identiques; même dans le cas de la singularité de plus gros diamètre. Ces données nous ont permis de définir les dimensions de notre machine d'essais (cf. I -134).

Pour simplifier le mode opératoire, nous avons utilisé le modèle proposé par MONCH et GALSTER. La matrice est réalisée en araldite photoélastique (Araldite D) de module d'YOUNG $E = 400 \text{ daN/mm}^2$ et de coefficient de POISSON $\nu = 0,4$.

La liaison adhérente est obtenue en collant l'inclusion dans un trou percé au centre de la matrice. L'épaisseur du joint de colle varie entre 0,08 et 0,1 millimètre.

Pour la non-adhérence, nous avons introduit l'inclusion, préalablement graissée, très légèrement en force dans la matrice. Nous avons pu vérifier que les contraintes tangentielles étaient nulles sur le pourtour de la singularité, satisfaisant ainsi aux hypothèses de la résolution théorique.

Nous nous sommes attaché à ce que l'usinage des matériaux photoélastiques ne provoque pas l'apparition de déformations ré-

siduelles importantes risquant de perturber les mesures.

III -12. Paramètres des essais.

Nous avons fait varier les caractéristiques mécaniques de l'inclusion en donnant au rapport E_0/E des valeurs variant régulièrement depuis zéro (cas du trou libre) jusqu'à une valeur A, positive réelle, aussi grande qu'on le veut.

Pour cela nous avons dû fabriquer des matières plastiques en ajoutant une charge calcaire très fine (Blanc d'Espagne), en proportions variables, à une résine époxyde.

Les propriétés mécaniques des composés obtenus dépendent de la nature des composants du mélange et des proportions choisies (13).

Nous avons vérifié dans chaque cas que le matériau était élastique et que les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie étaient vérifiées.

Les caractéristiques mécaniques de chaque composé ont été mesurées sur des éprouvettes cylindriques préparées dans les mêmes conditions que celles d'où étaient extraites les inclusions.

Les résultats de ces mesures sont indiqués dans le tableau ci-après.

$E_0 \text{ daN/mm}^2$	0	15	$12 \cdot 10^1$	$40 \cdot 10^1$	10^3	$21 \cdot 10^3$
ν_0	/	0,4	0,4	0,4	0,4	0,3
E_0/E	0	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-1}$	1,0	2,5	52,5

Les échantillons ont été soumis à une sollicitation de traction biaxiale, les contraintes appliquées p_1 et p_2 prenant les valeurs ci-après :

adhérence :

$$p_1 = 1, 2, 3, 4, 5$$
$$p_2 = 1$$

non-adhérence : $p_1 = 4, 5$
 $p_2 = 1$

Dans le cas de la non-adhérence nous avons restreint les valeurs de p_1 à 4 et 5. En effet, pour des valeurs égales à 1, 2 ou 3 nous avons établi dans le chapitre précédent que tout se passe comme s'il y avait un trou libre.

On retrouve ainsi le cas de l'adhérence pour E_0 nul. Il n'est pas dès lors nécessaire de procéder à une expérimentation complète. Nous nous sommes borné à vérifier, pour chaque rapport E_0/E , la validité de notre étude des conditions aux limites.

III -2. RESULTATS EXPERIMENTAUX.

Ils sont résumés sur les figures III-1 à III-28, où sont représentées, simultanément, les variations théoriques et expérimentales de $(\sigma_1 - \sigma_2)/p_2$, de manière à disposer de résultats adimensionnels, p_2 étant unitaire.

III -21. Influence des caractéristiques mécaniques de la singularité.

Dans le cas de l'adhérence, lorsque l'inclusion est plus rigide que la matrice ($E_0 > E$), il y a concentration des isostatiques dans la singularité qui est alors le siège de contraintes élevées. Lorsque l'inclusion est moins rigide que la matrice, les isostatiques sont, au contraire, repoussées dans la matrice. L'inclusion est alors le siège de contraintes très faibles. Enfin, lorsque l'inclusion et la matrice sont faites du même matériau, la continuité du milieu est rétablie par l'adhérence, aux perturbations dues au collage près.

Lorsque le rapport des modules d'élasticité E_0/E varie, on observe un passage progressif du comportement élastique du modèle entre les cas extrêmes du trou libre et de l'inclusion rigide.

Dans le cas de la non-adhérence, nous vérifions, indépendamment de la nature de la singularité, qu'il n'y a pas de contraintes tangentielles sur le pourtour de l'inclusion puisque l'interface est une isostatique.

Le comportement élastique du modèle est alors voisin de celui qu'on observe dans le cas du trou libre tant pour la distribution des isochromatiques que pour l'allure des isostatiques. Il n'en diffère que par les perturbations très localisées, engendrées par l'arc en contact avec l'inclusion, et l'écart va en diminuant à mesure que E_0 décroît.

III -22. Influence de l'existence de la liaison matrice-granulat.

L'existence de la liaison entre l'inclusion et la matrice affecte d'autant plus le comportement élastique du modèle que le module d'élasticité de la singularité est élevé.

Outre les différences d'allure des réseaux d'isostatiques que nous venons de décrire, nous avons pu constater que les valeurs maximales des contraintes dans la matrice sont plus élevées dans le cas de la non-adhérence que dans celui de l'adhérence.

Ces valeurs maximales sont toujours relevées au niveau de l'interface singularité-matrice.

L'existence de la liaison entre les singularités et la matrice apparaît ainsi comme un facteur essentiel du comportement des matériaux hétérogènes, tant dans le domaine élastique que pour les résistances à la rupture. Son rôle est cependant influencé par les caractéristiques mécaniques respectives des matériaux en présence.

Nous retrouvons ainsi, sur le comportement d'un modèle très élémentaire, les conclusions plus générales énoncées par MASO (1) dans le cas des mortiers et bétons.

Il convient de remarquer que la représentation schématique que nous avons choisie permet seulement de distinguer deux types de liaison entre la matrice et la singularité, selon qu'il y a adhérence ou pas. On ne peut pas introduire directement la nature de l'adhérence, qui peut être plus ou moins bien réalisée et donner au collage une résistance plus ou moins importante.

On peut toutefois simuler une moins bonne ou une mauvaise adhérence en modifiant artificiellement les caractéristiques mécaniques de la singularité.

Les conditions aux limites, à l'interface, dans le cas d'une adhérence de faible résistance sont en effet comparables à celles de l'adhérence parfaite pour une singularité plus déformable puisque, à sollicitation égale, le déplacement radial à l'interface sera plus important.

On peut ainsi, en première approximation, étudier l'influence de la nature de l'adhérence en la ramenant à une variation du rapport E_0/E .

Cette méthode nous permettra, dans la suite de notre travail, d'étudier plus complètement le comportement des solides granulaires au voisinage de la limite de réversibilité et de la rupture.

III -3. CONCLUSIONS.

Les résultats que nous présentons dans ce chapitre montrent que les états de contraintes, théorique et expérimental, coïncident à 5 % près, pour l'ensemble des cas envisagés.

Lorsqu'on s'éloigne de la singularité, les valeurs expérimentales tendent plus rapidement que les valeurs théoriques vers la limite obtenue quand r croît indéfiniment.

Nous pouvons donc conclure que les hypothèses et les solutions théoriques que nous avons proposées au chapitre précédent permettent d'approcher la réalité physique avec une précision suffisante, compatible avec celle des appareillages de mesure extensométrique.

FIGURES REPRESENTANT LES
VARIATIONS DE $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{p_2}$ DANS LA MATRICE

$$E = 400 \text{ daN/mm}^2$$

$$\nu = 0,4$$

CAS DE L'ADHERENCE

$E_o = 0 \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = 1$

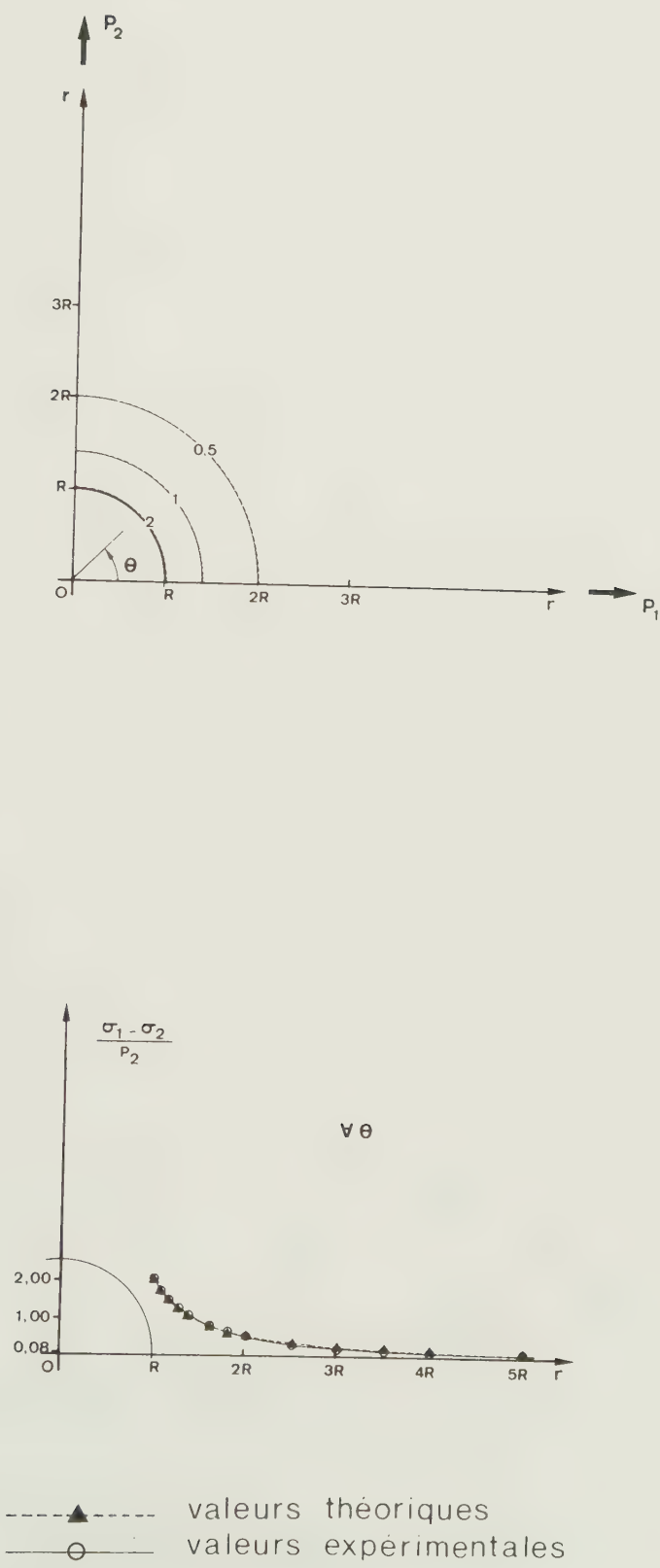


FIG. III-1

$E_o = 0 \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = 2$

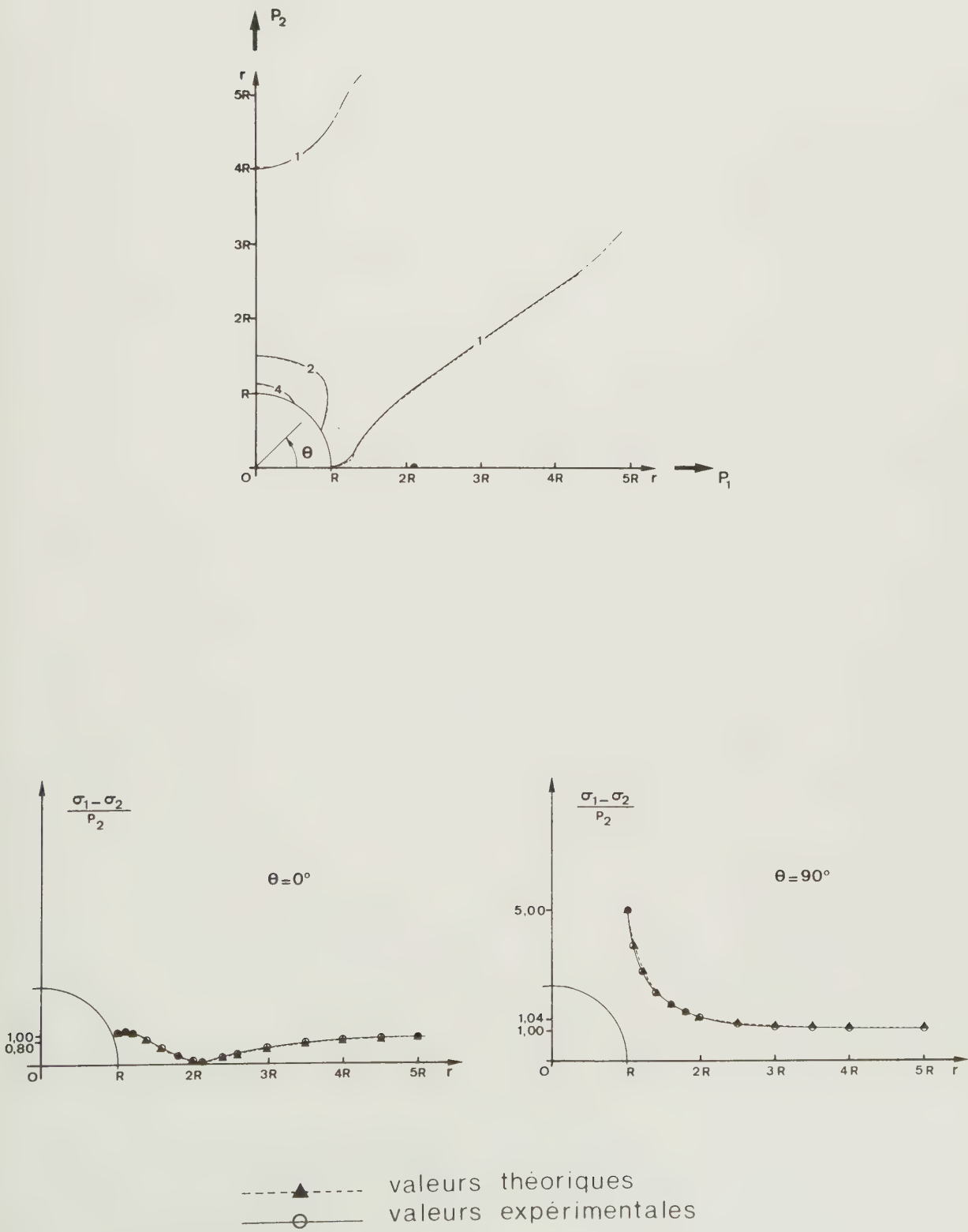
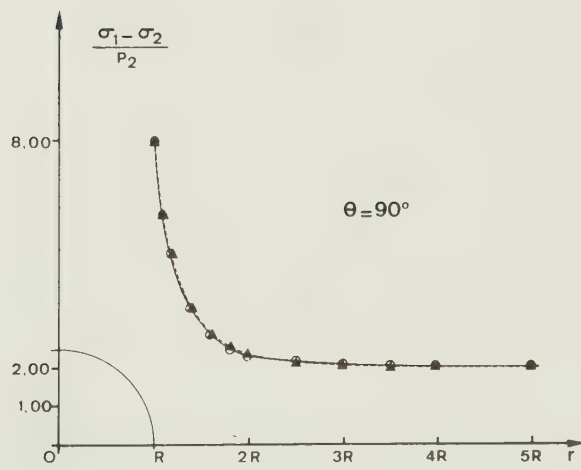
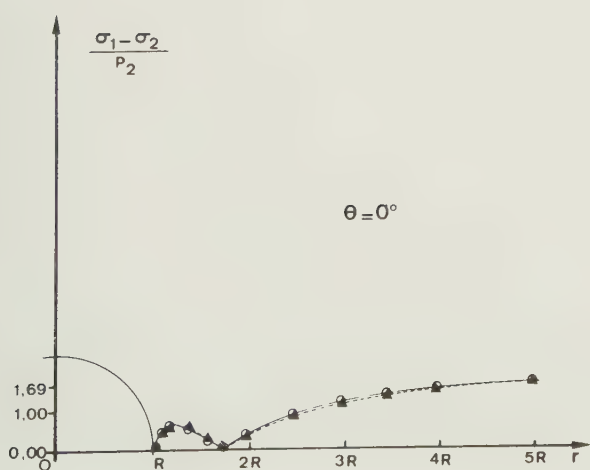
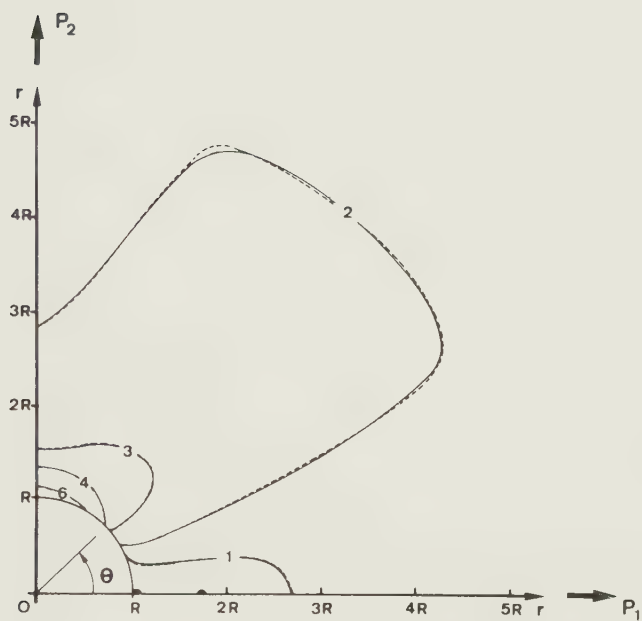


FIG. III - 2

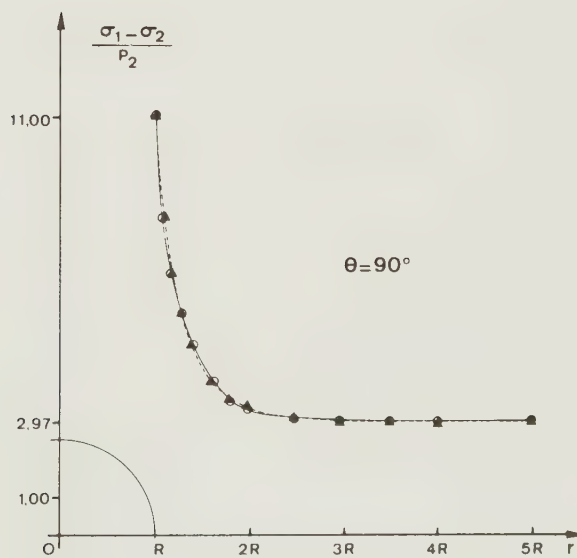
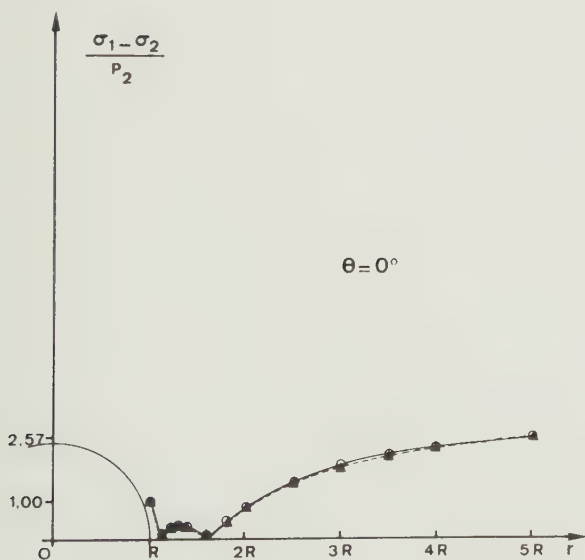
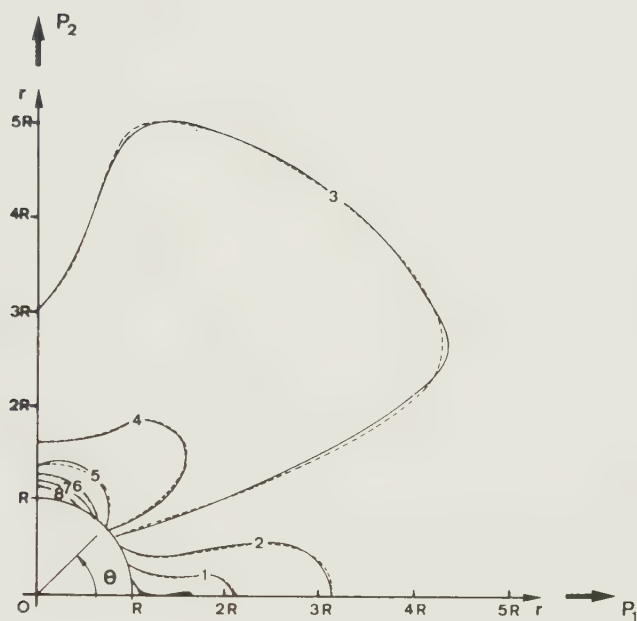
$$E_0 = 0, \quad \frac{P_1}{P_2} = 3$$



---▲--- valeurs théoriques
 —○— valeurs expérimentales

FIG. III - 3

$$E_0 = 0 \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = 4$$



-▲- - - - - valeurs théoriques
 -○- - - - - valeurs expérimentales

FIG. III- 4

$E_o = 0 \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = 5$



FIG. III - 5

$E_o \gg E \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = 1$

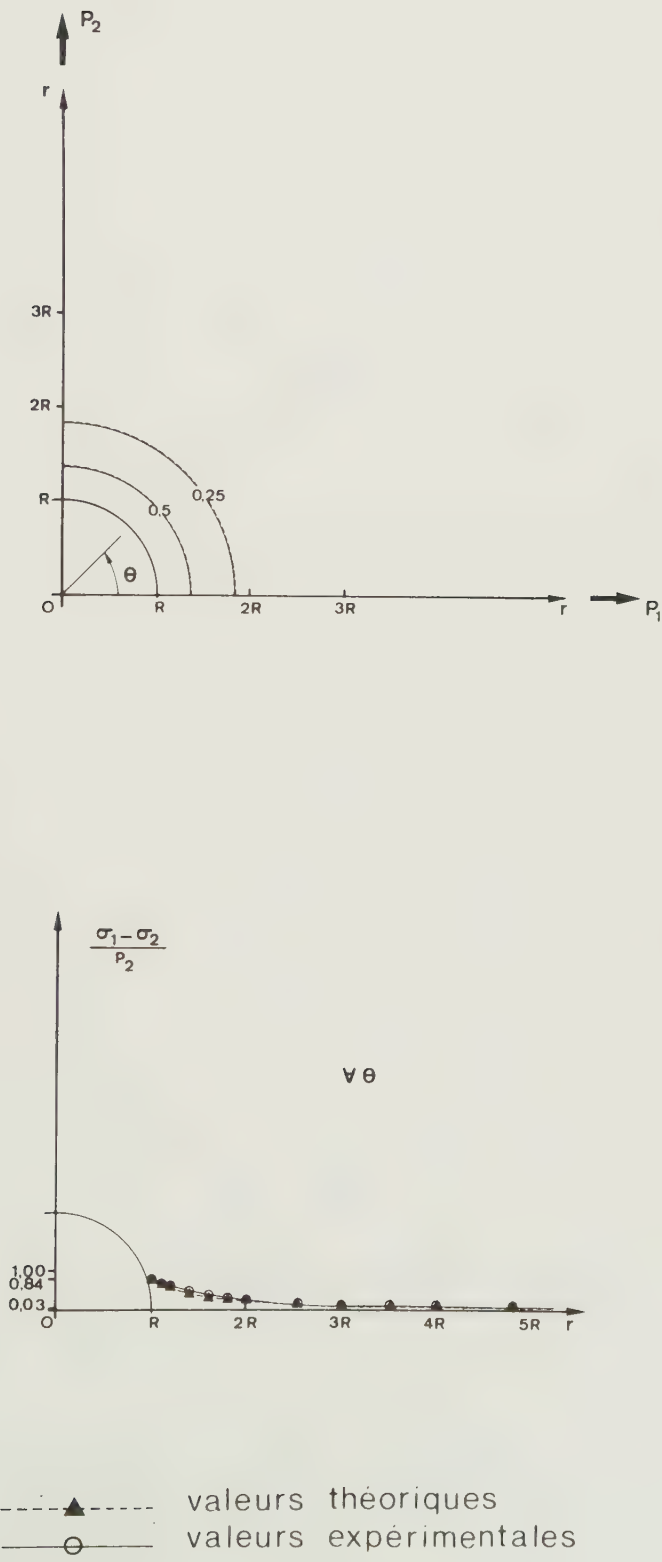
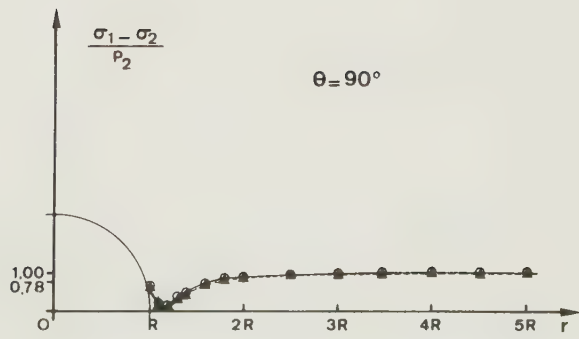
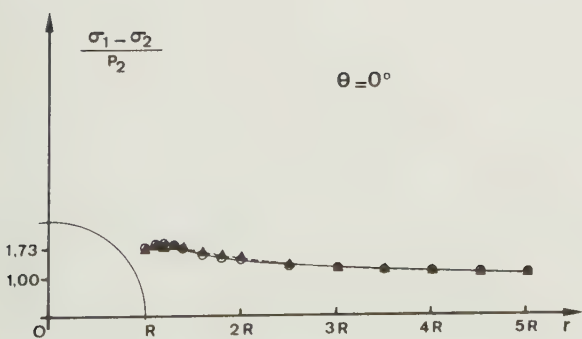
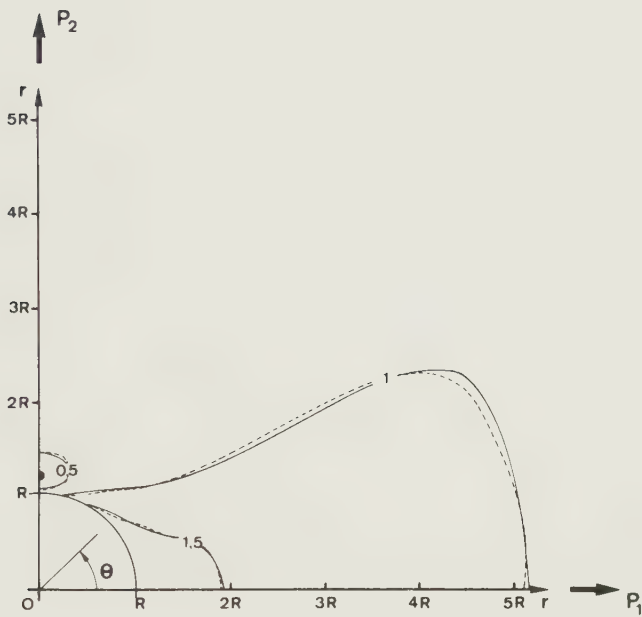


FIG . III - 6

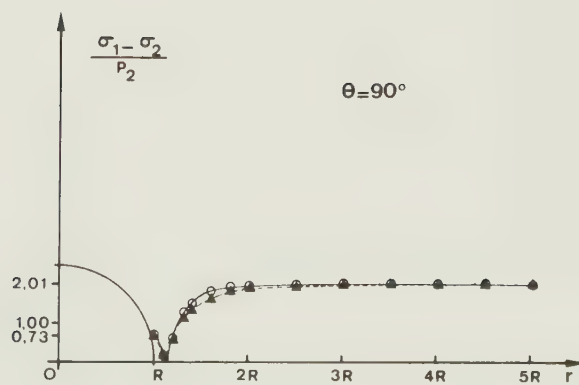
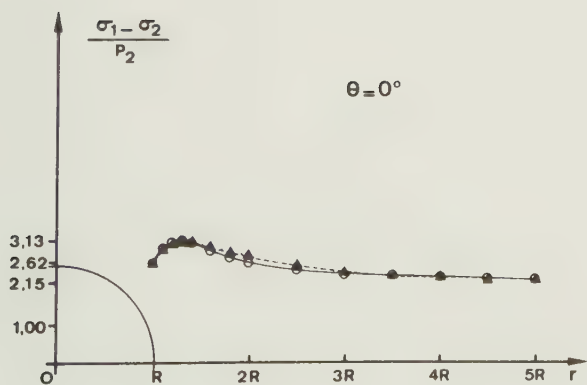
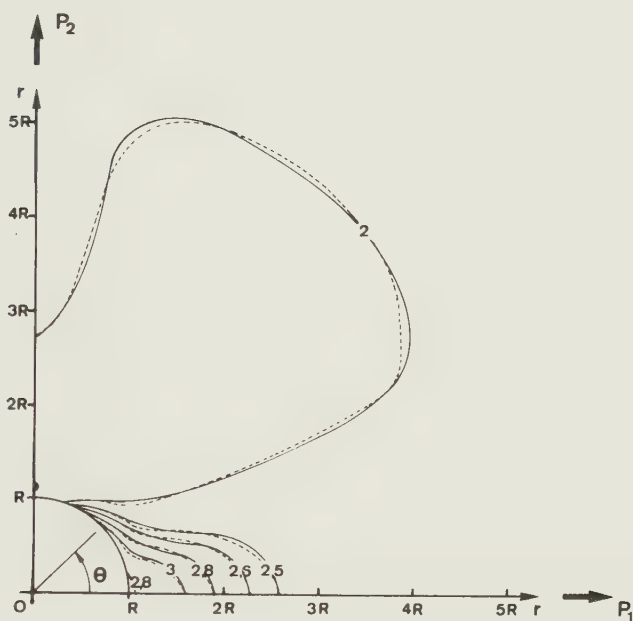
$E_o \gg E \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = 2$



-----▲----- valeurs théoriques
-----○----- valeurs expérimentales

FIG. III-7

$$E_0 \gg E \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = 3$$



---▲--- valeurs théoriques
 ---○--- valeurs expérimentales

FIG. III-8

$E_o \gg E \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = 4$

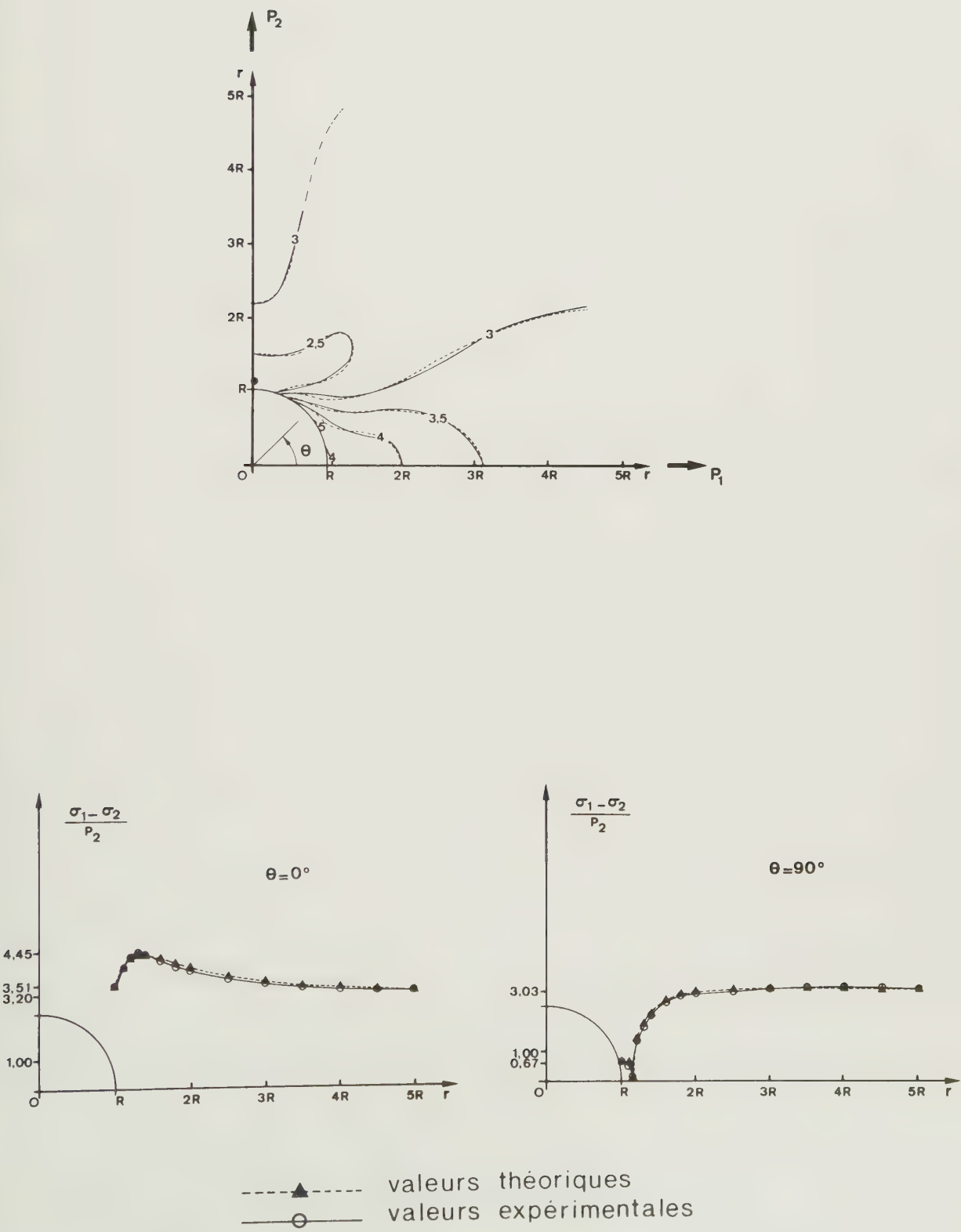
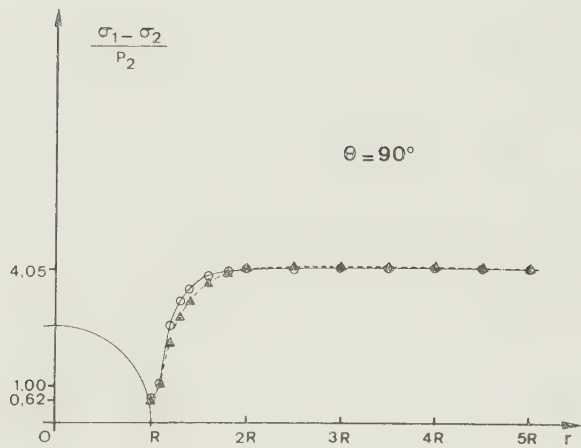
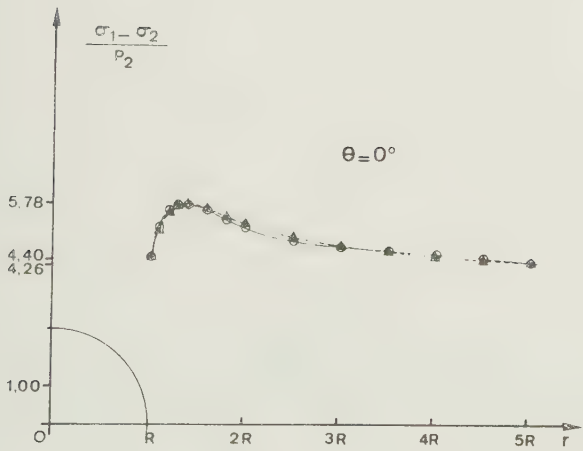
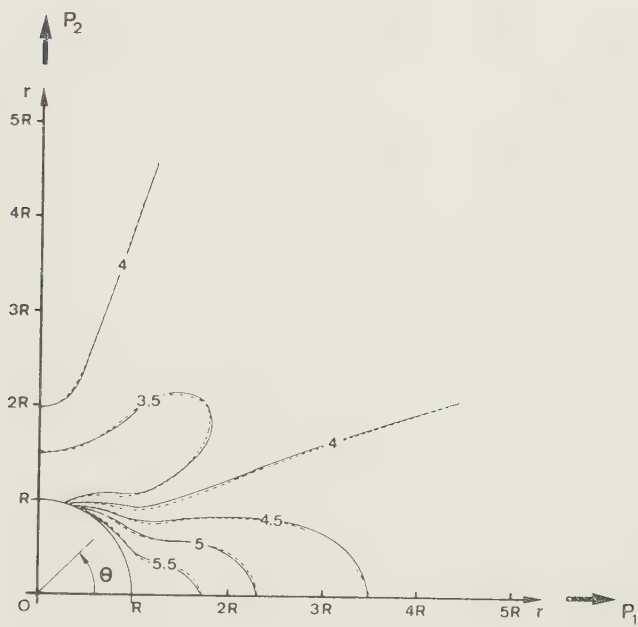


FIG. III - 9

$E_0 \gg E \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = 5$



-----▲----- valeurs théoriques
-----○----- valeurs expérimentales

FIG. III - 10

$E_o = 1\,000\text{ daN/mm}^2$, $\frac{P_1}{P_2} = 1$

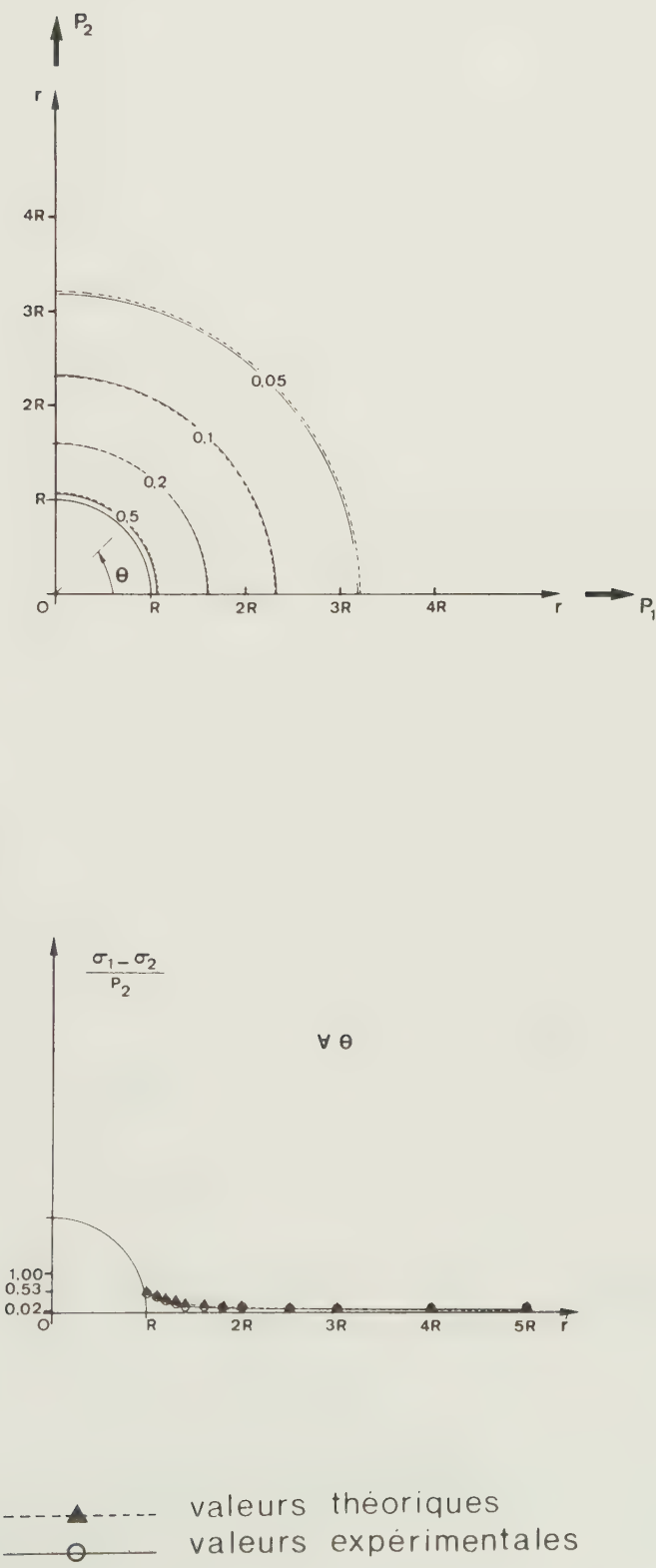
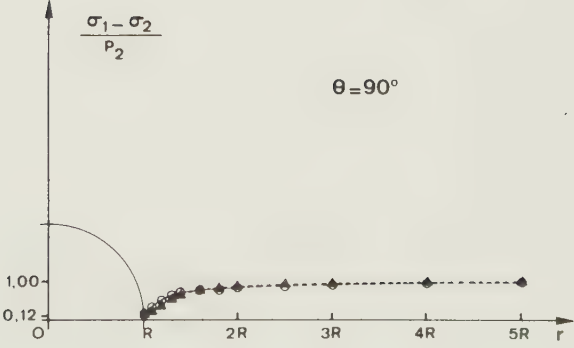
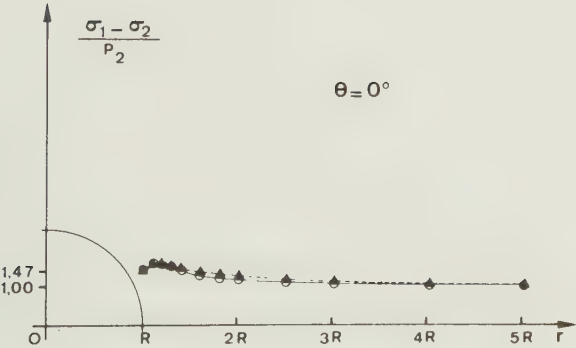
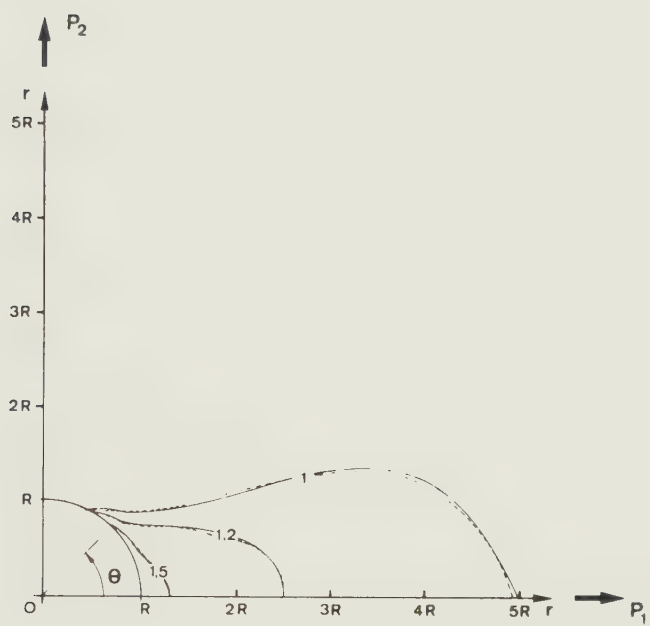


FIG. III - 11

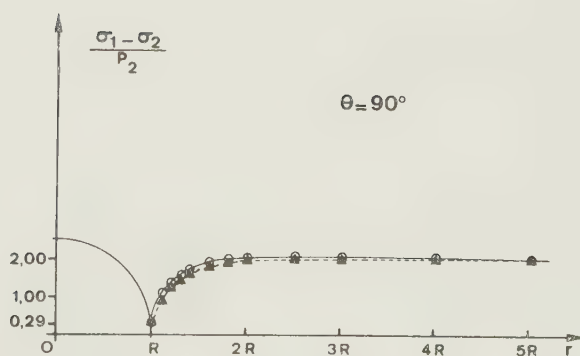
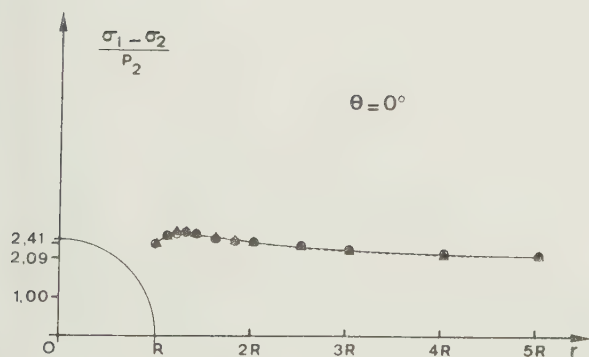
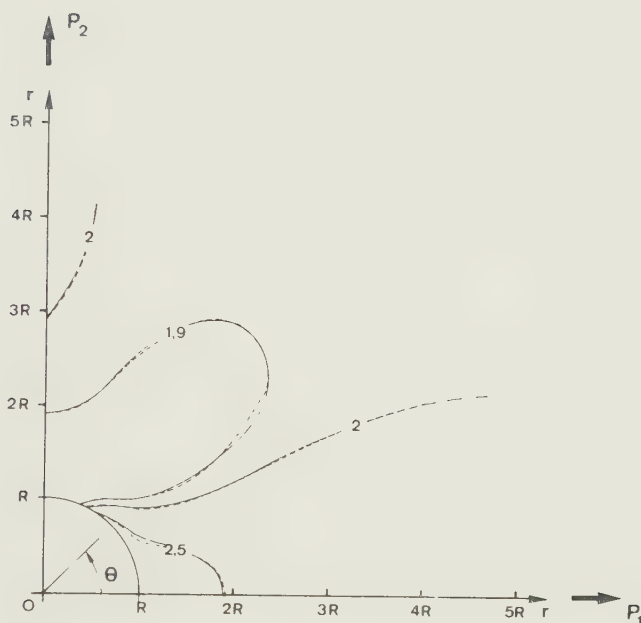
$E_o = 1\,000\text{ daN/mm}^2$, $\frac{P_1}{P_2} = 2$



---▲--- valeurs théoriques
—○— valeurs expérimentales

FIG. III - 12

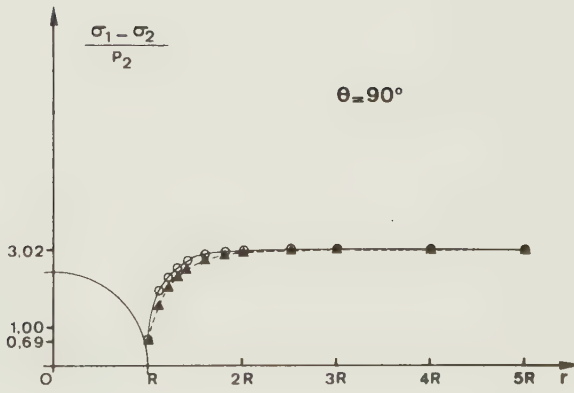
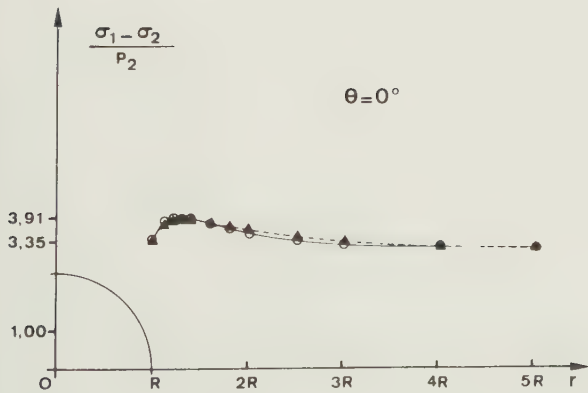
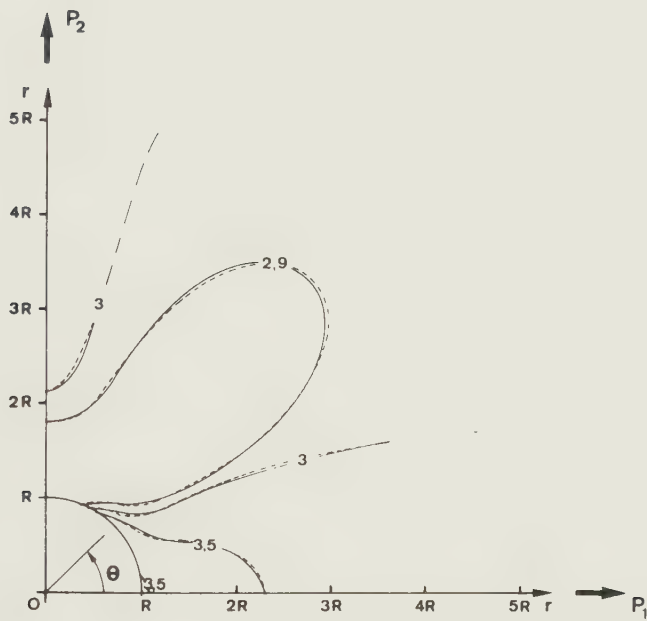
$$E_0 = 1\,000 \text{ daN/mm}^2, \quad \frac{P_1}{P_2} = 3$$



---▲--- valeurs théoriques
 —○— valeurs expérimentales

FIG. III-13

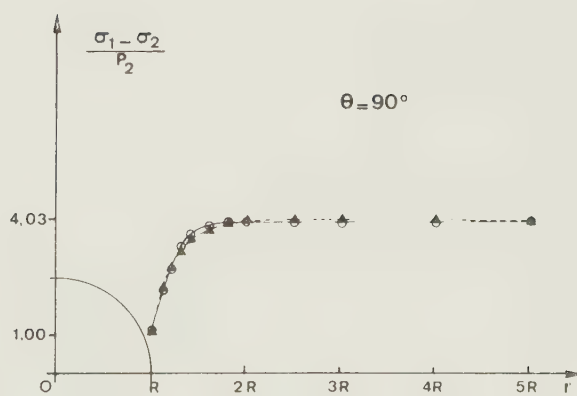
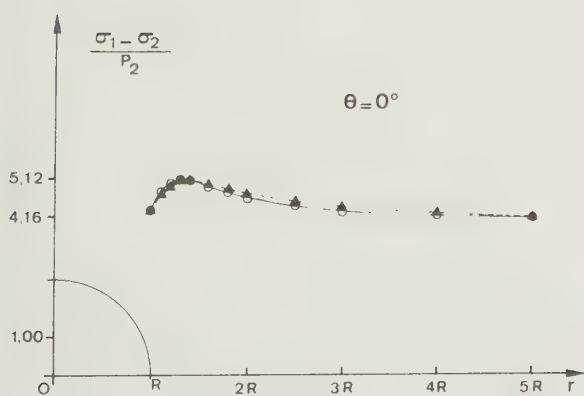
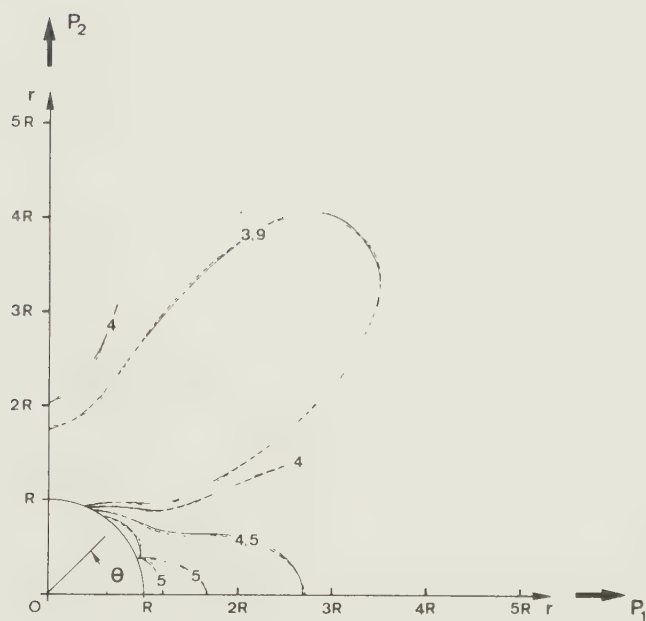
$E_0 = 1000 \text{ daN/mm}^2$, $\frac{P_1}{P_2} = 4$



---▲--- valeurs théoriques
—○— valeurs expérimentales

FIG. III-14

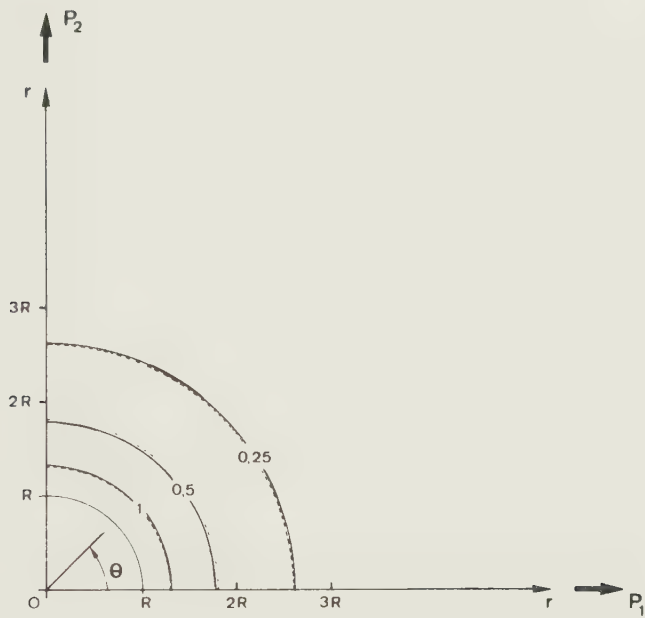
$$E_0 = 1000 \text{ daN/mm}^2, \quad \frac{P_1}{P_2} = 5$$



-----▲----- valeurs théoriques
 -----○----- valeurs expérimentales

FIG. III - 15

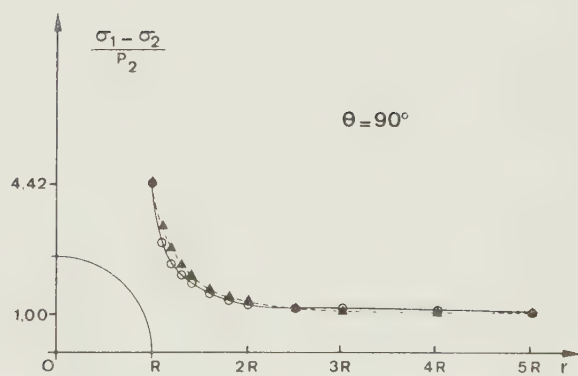
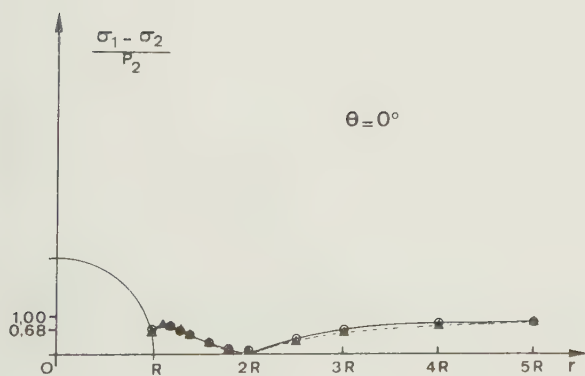
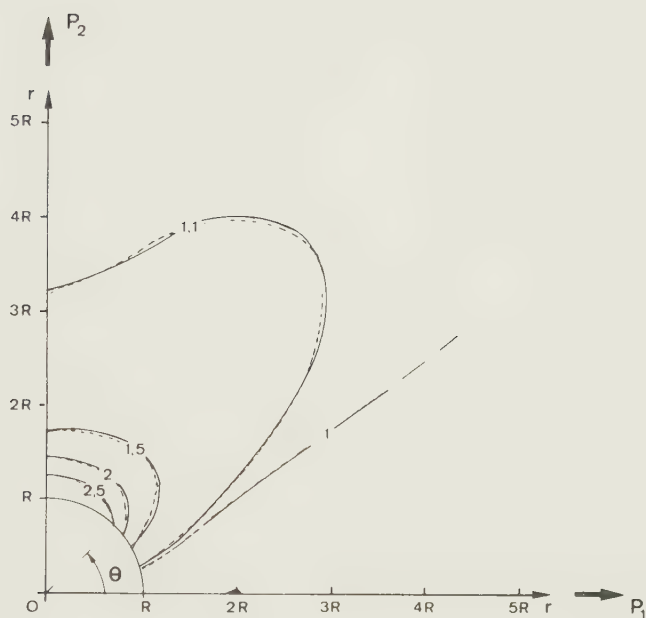
$E_o = 15 \text{ daN/mm}^2$, $\frac{P_1}{P_2} = 1$



---▲--- valeurs théoriques
—○— valeurs expérimentales

FIG. III - 16

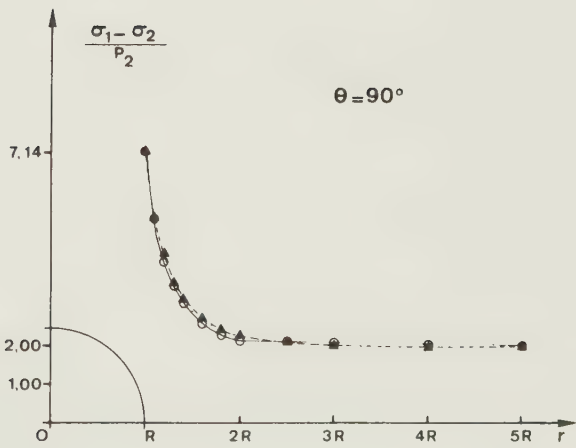
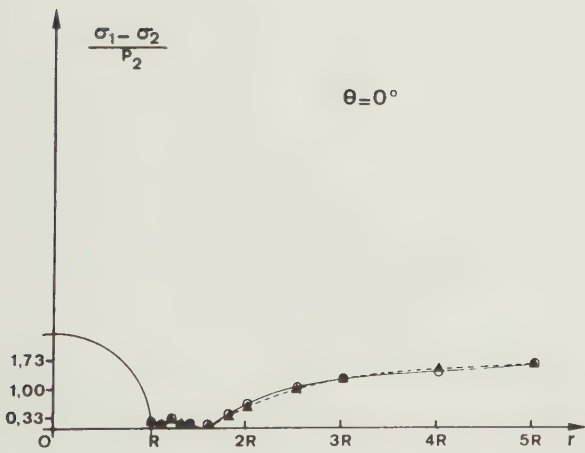
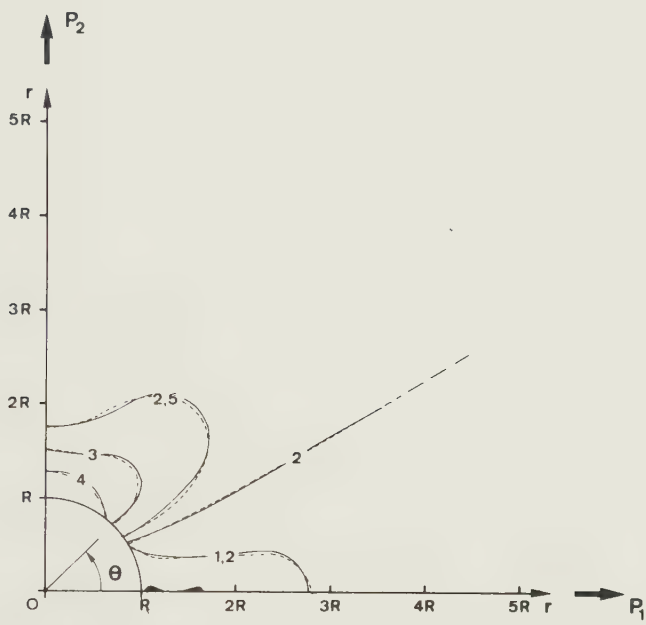
$$E_o = 15 \text{ daN/mm}^2, \quad \frac{P_1}{P_2} = 2$$



---▲--- valeurs théoriques
 ---○--- valeurs expérimentales

FIG. III-17

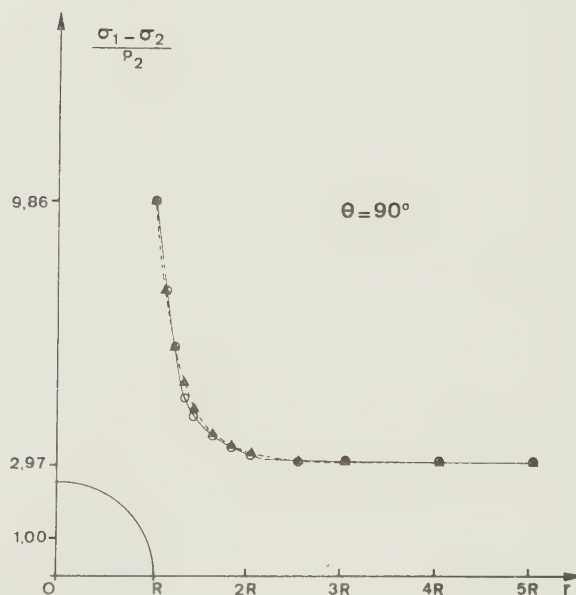
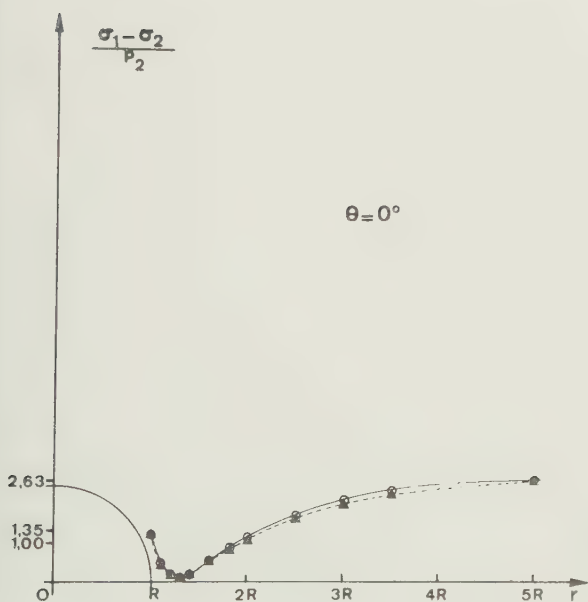
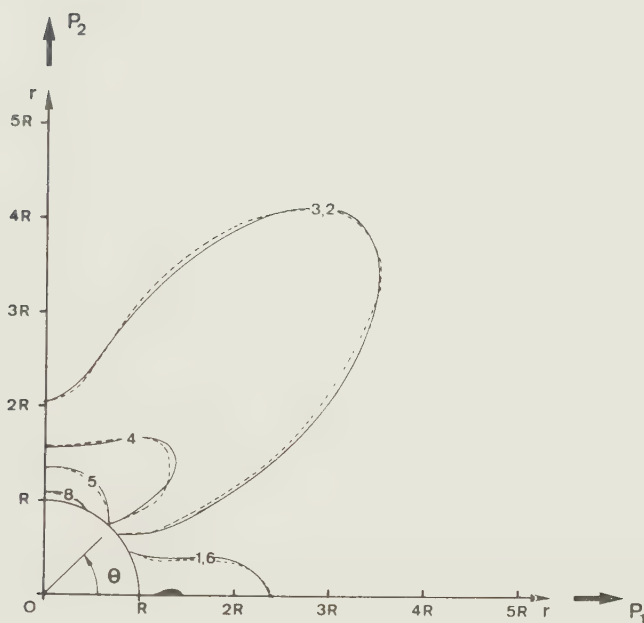
$E_o = 15 \text{ daN/mm}^2$, $\frac{P_1}{P_2} = 3$



---▲--- valeurs théoriques
---○--- valeurs expérimentales

FIG. III - 18

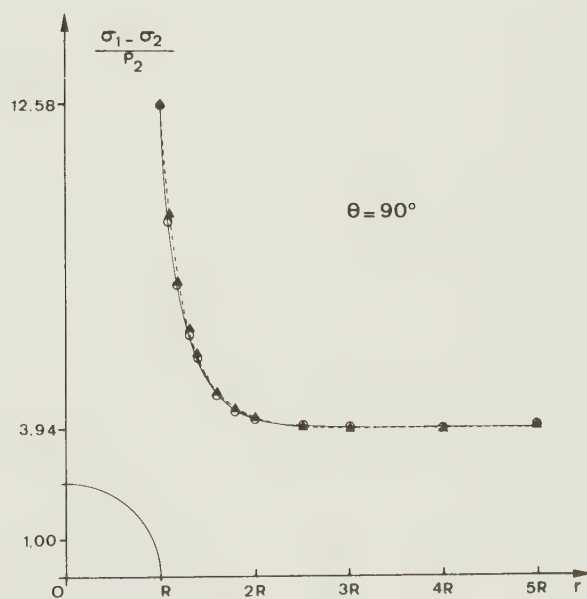
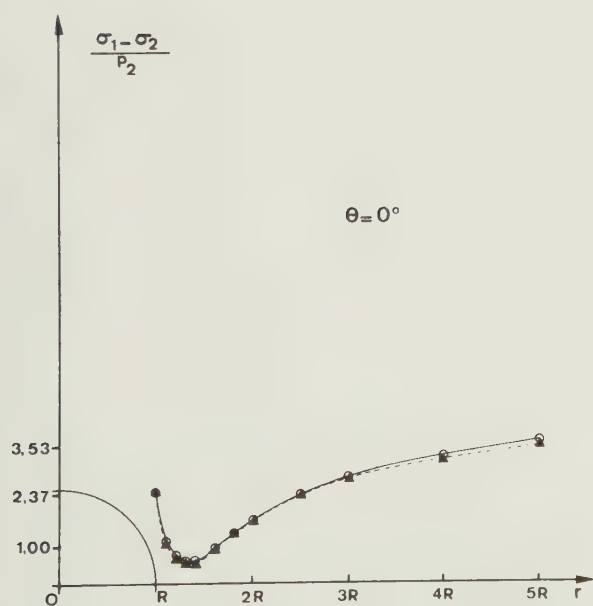
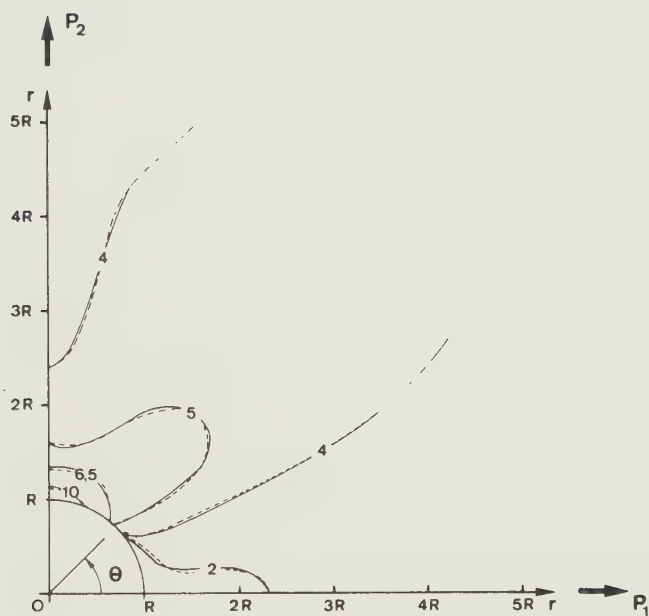
$$E_0 = 15 \text{ daN/mm}^2, \quad \frac{P_1}{P_2} = 4$$



-▲- - - - - valeurs théoriques
 -○- - - - - valeurs expérimentales

FIG. III - 19

$$E_0 = 15 \text{ daN/mm}^2, \quad \frac{P_1}{P_2} = 5$$

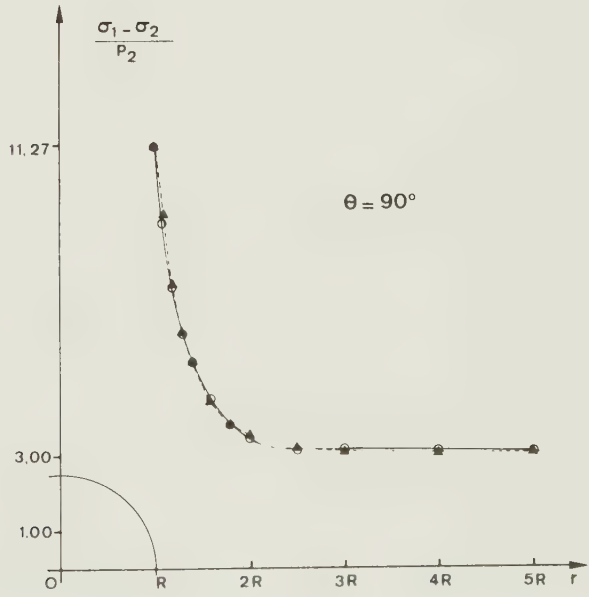
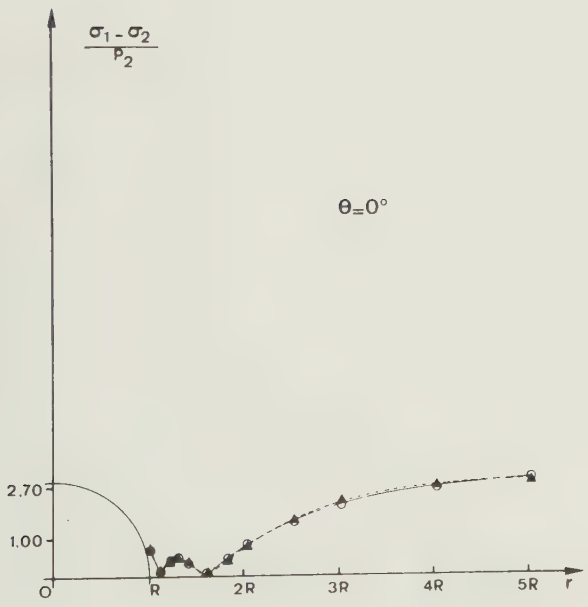
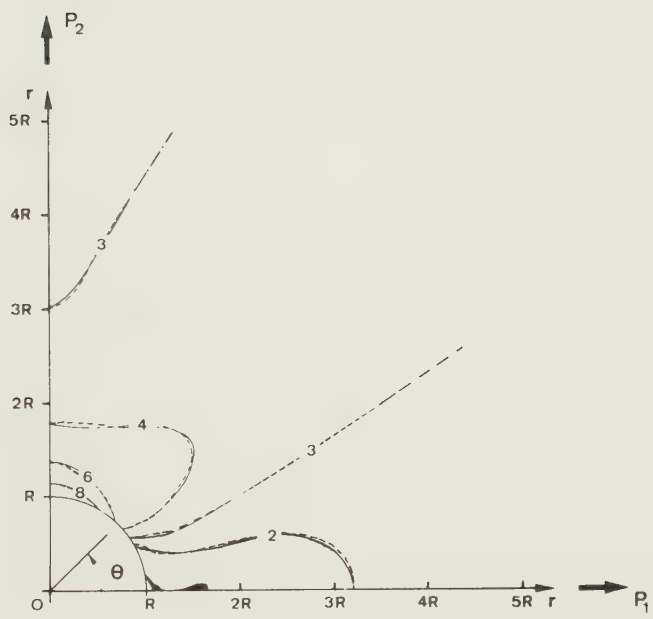


- - - ▲ - - - valeurs théoriques
 — ○ — valeurs expérimentales

FIG. III-20

CAS DE LA NON-ADHERENCE

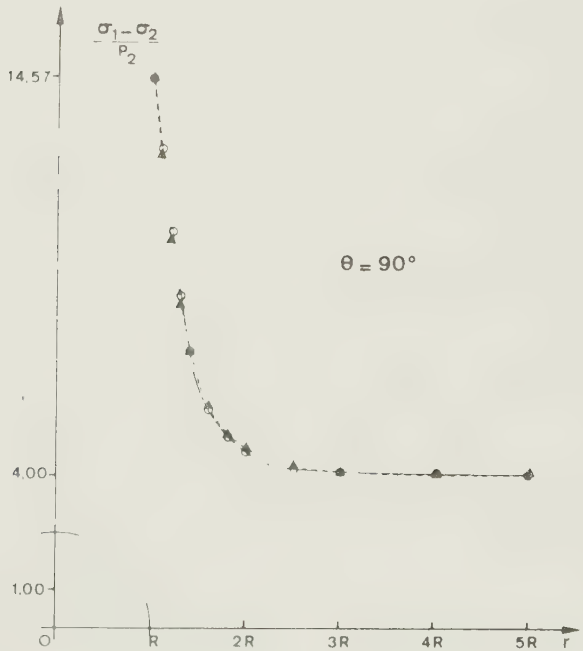
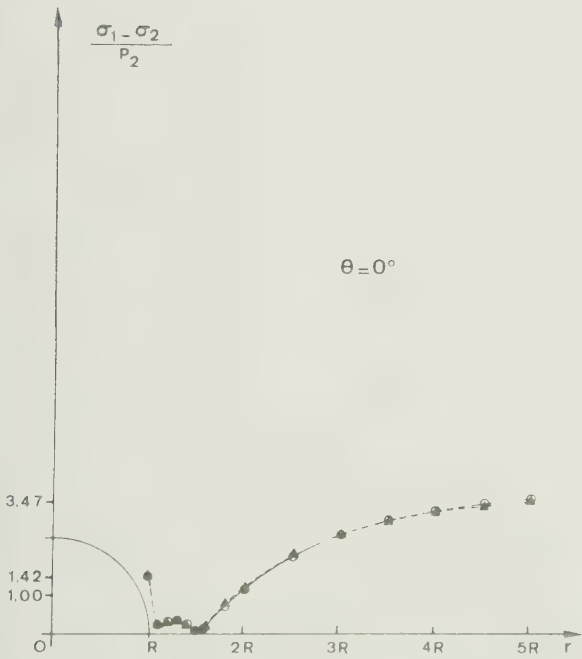
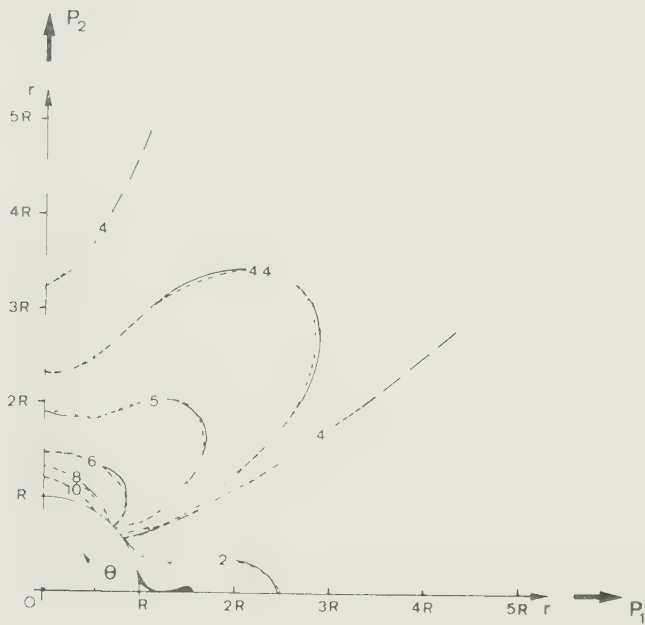
$E_0 \gg E \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = 4$



-----▲----- valeurs theoriques
-----○----- valeurs experimentales

FIG. III - 21

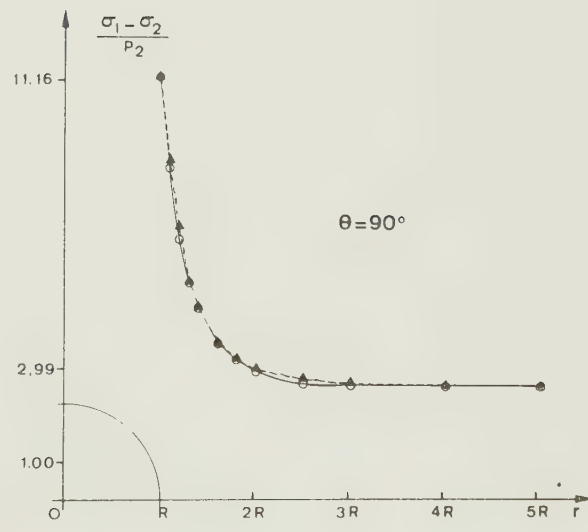
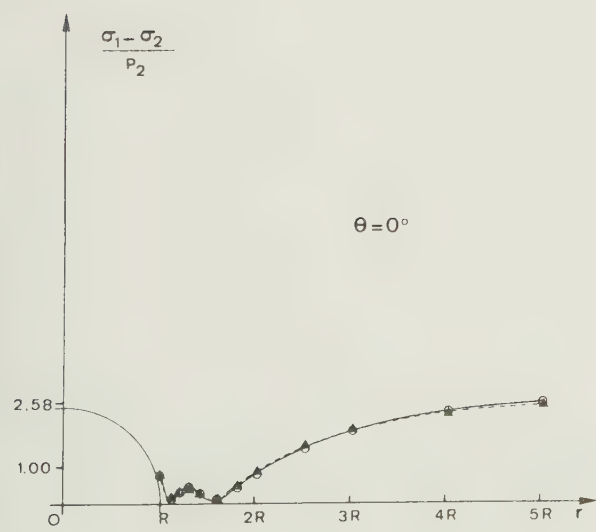
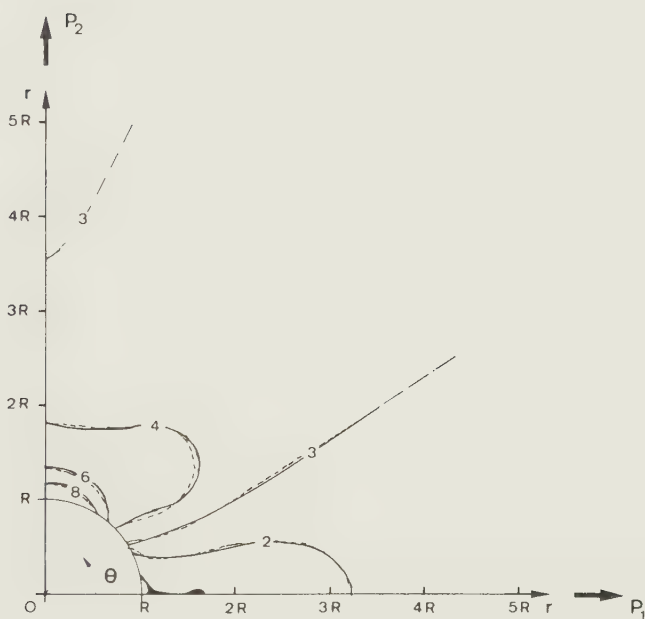
$E_0 \gg E \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = 5$



-----▲----- valeurs theoriques
- - - - -○- - - - - valeurs experimentales

FIG III-22

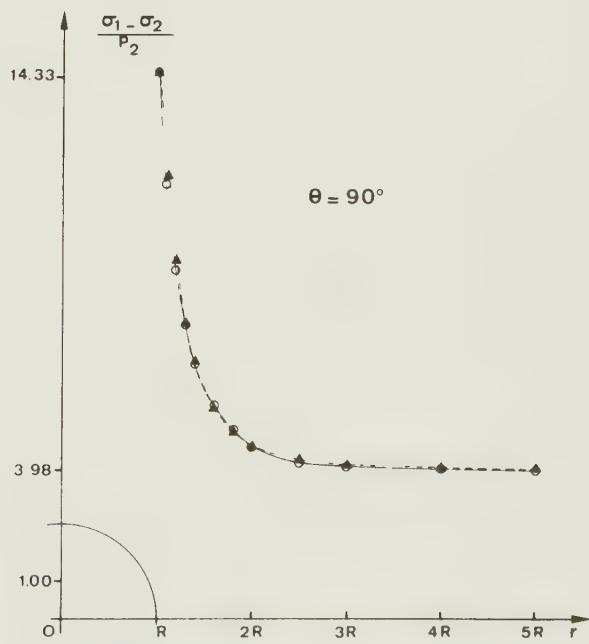
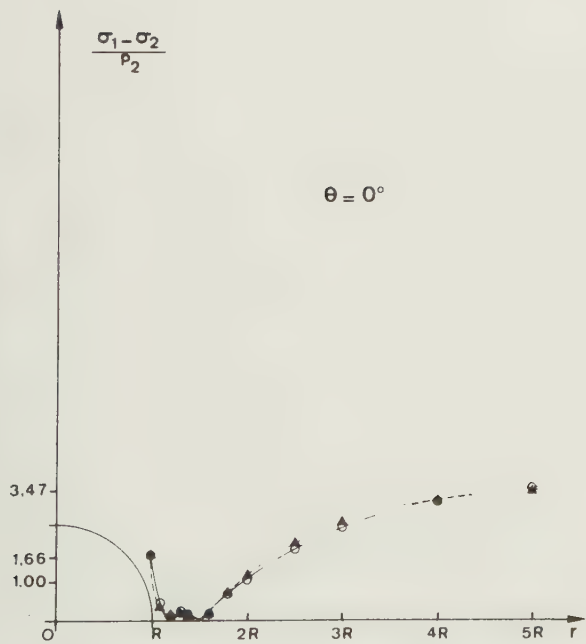
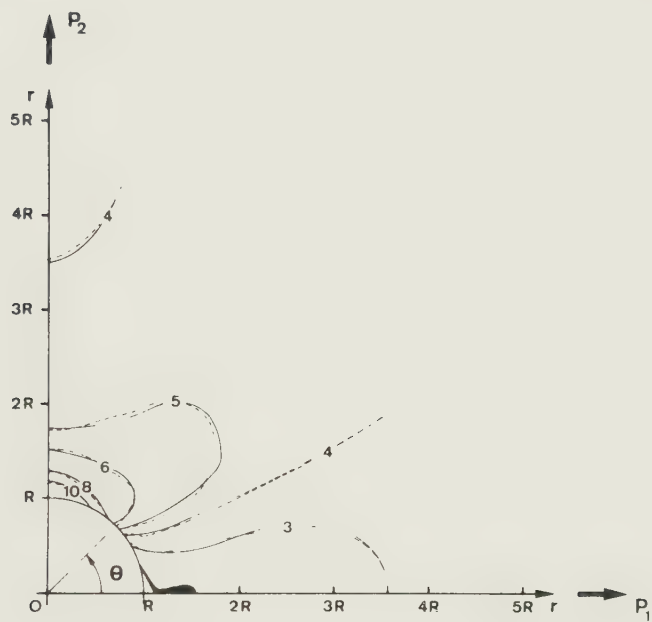
$E_o = 400 \text{ daN/mm}^2 \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = 4$



---▲--- valeurs théoriques
—○— valeurs expérimentales

FIG. III - 23

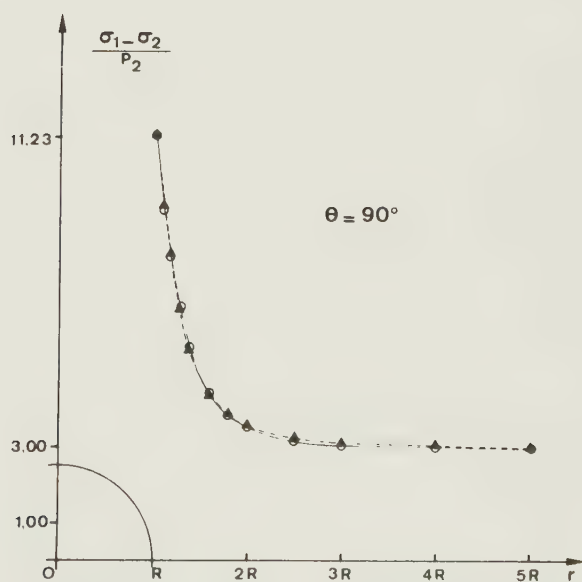
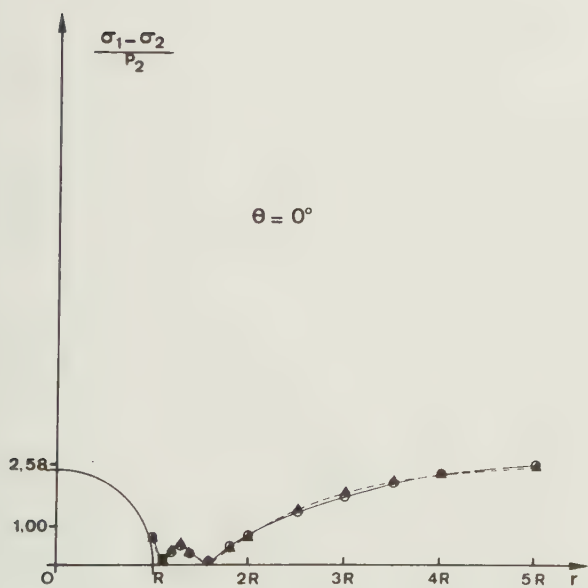
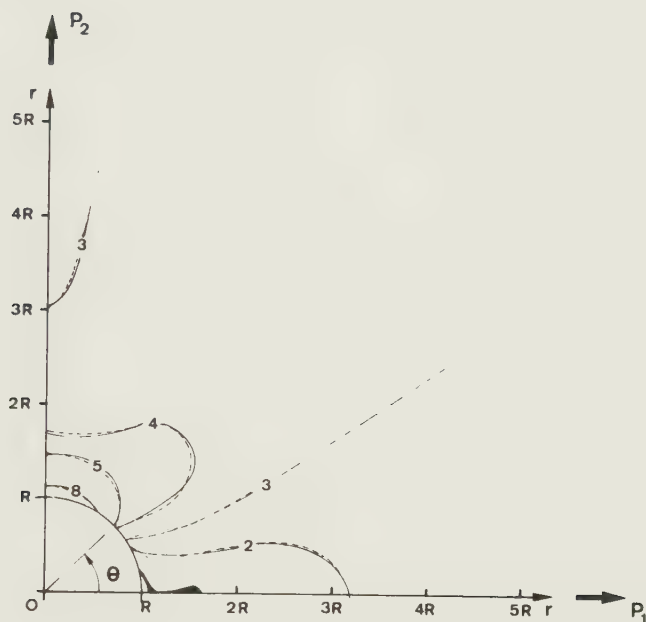
$E_o = 400 \text{ daN/mm}^2 \quad , \quad \frac{P_1}{P_2} = 5$



---▲--- valeurs théoriques
—○— valeurs expérimentales

FIG. III - 24

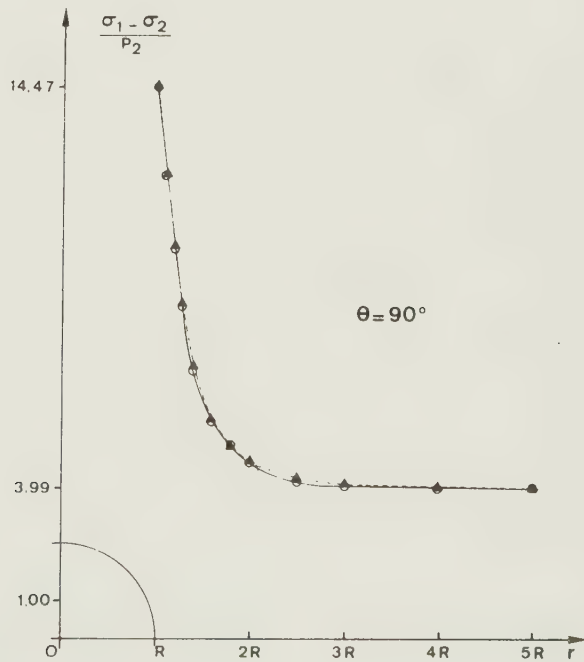
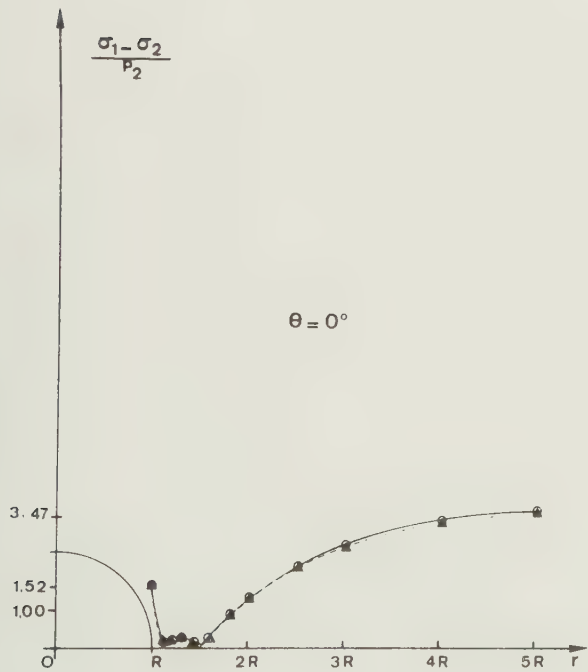
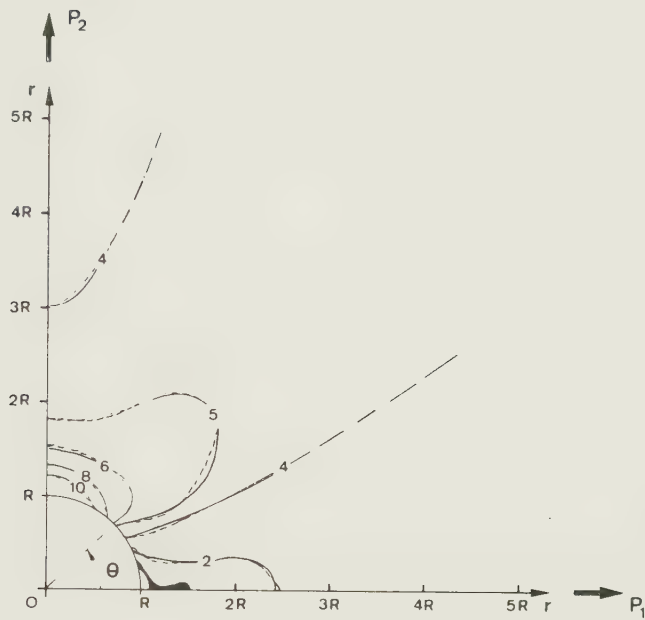
$$E_o = 1\,000 \text{ daN/mm}^2, \quad \frac{P_1}{P_2} = 4$$



---▲--- valeurs théoriques
 —○— valeurs expérimentales

FIG. III - 25

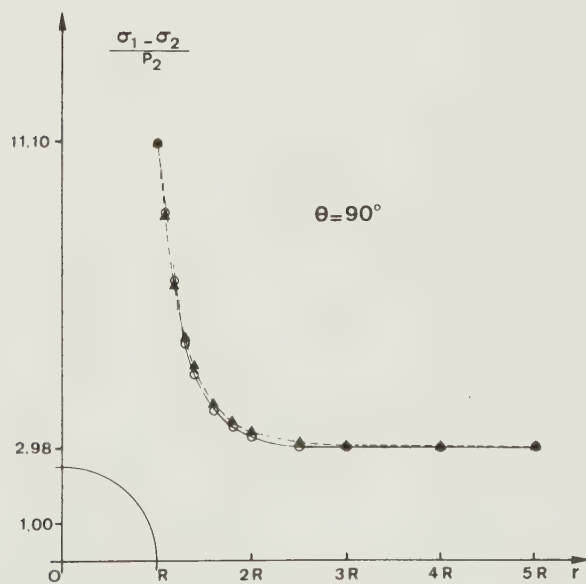
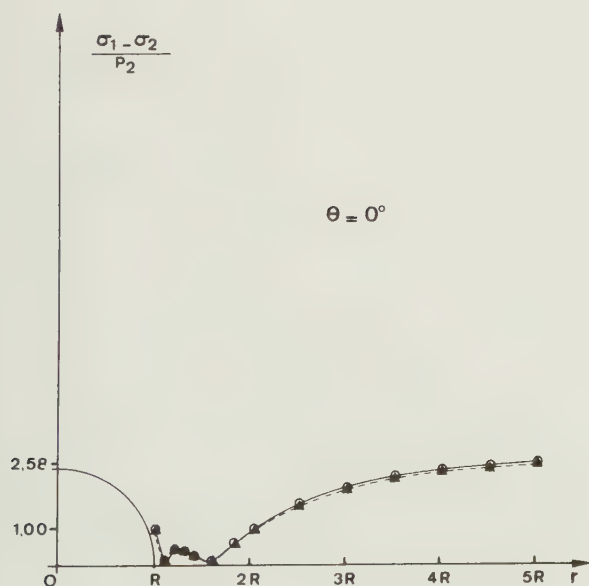
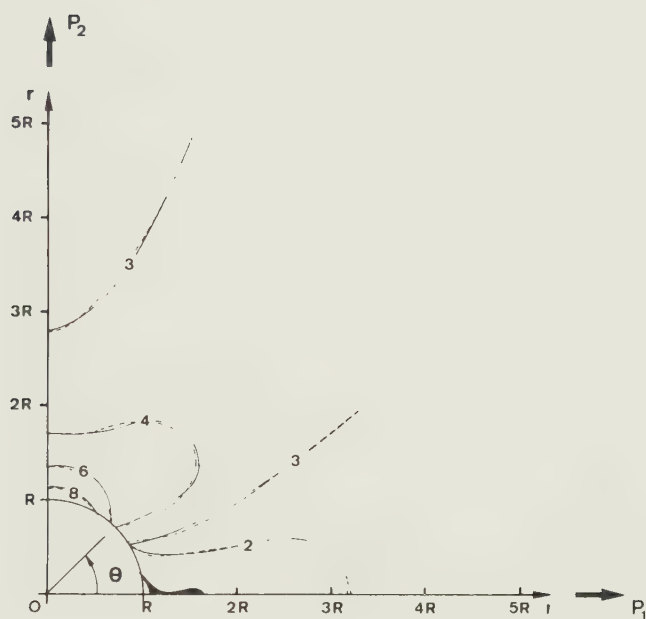
$E_o = 1\,000 \text{ daN/mm}^2, \quad \frac{P_1}{P_2} = 5$



---▲--- valeurs théoriques
—○— valeurs expérimentales

FIG. III - 26

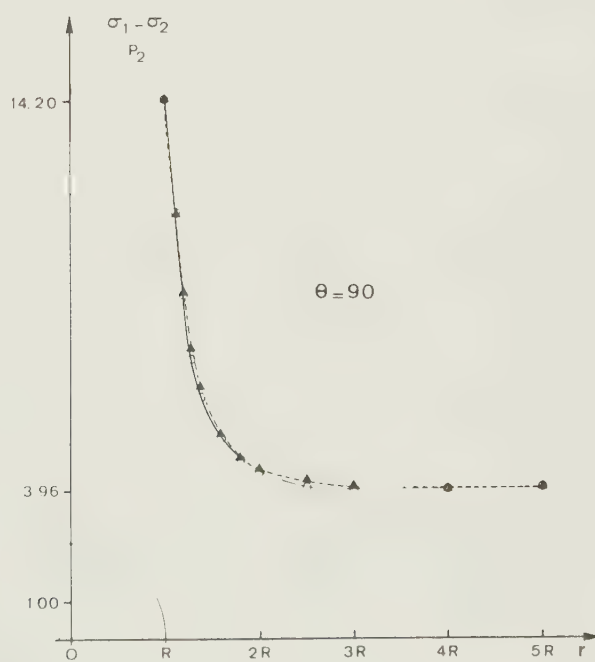
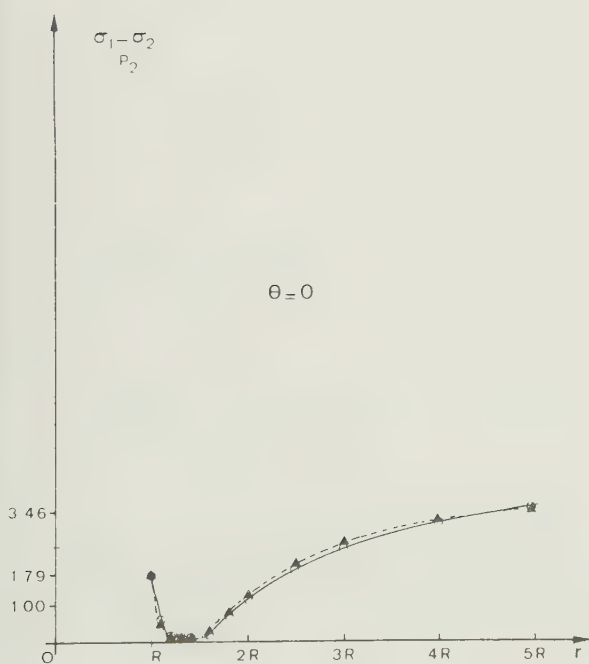
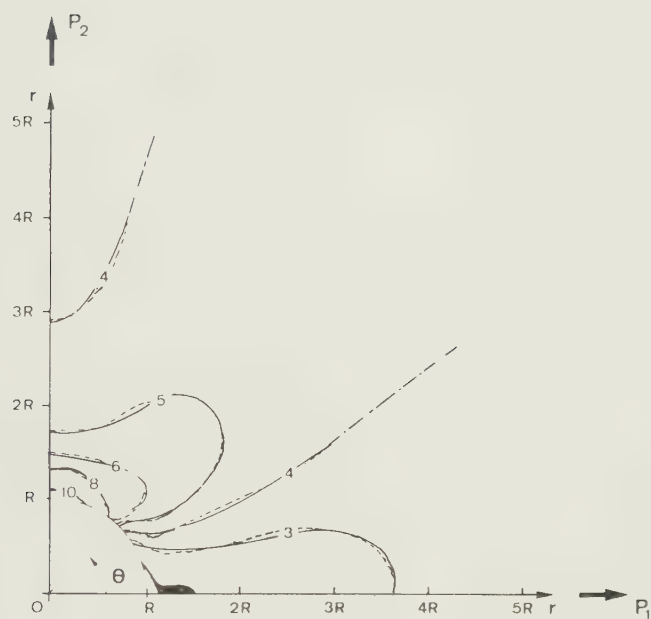
$$E_o = 120 \text{ daN/mm}^2, \quad \frac{P_1}{P_2} = 4$$



---▲--- valeurs théoriques
 ---○--- valeurs expérimentales

FIG. III-27

$$E_0 = 120 \text{ daN/mm}^2, \quad \frac{P_1}{P_2} = 5$$



---▲--- valeurs théoriques
 ---○--- valeurs expérimentales

FIG. III - 28

CHAPITRE IV

ETUDE DU COMPORTEMENT ELASTIQUE DU MODELE ELEMENTAIRE
LORSQUE LA MATRICE EST HETEROGENE.

Pour que les conclusions de l'étude sur modèle à deux phases homogènes élastiques puissent s'appliquer aux matériaux granulaires cohérents à granulométrie étendue, il faut que l'on puisse considérer le liant et les éléments fins comme un milieu homogène vis à vis de ceux de gros diamètre, généralisant ainsi l'hypothèse formulée par DANTU (2) et, à sa suite, MASO (1), dans le cas des mortiers et bétons.

Cela revient à établir l'existence d'un "seuil d'hétérogénéité", rapport du diamètre du plus gros grain de la matrice à celui de la singularité du modèle, au-delà duquel l'hypothèse précédente n'est plus valable.

Il convient de remarquer que la notion de seuil est incompatible avec la continuité de la granulométrie et, dans ce cas, on ne peut plus formuler l'hypothèse de DANTU généralisée.

On est ainsi conduit à distinguer deux catégories de matériaux granulaires cohérents à granulométrie continue, en fonction de la proportion de liant présent dans le matériau.

Si la proportion de liant est suffisante pour qu'il puisse constituer une phase homogène, on considèrera celle-ci comme la matrice du modèle.

Dans le cas contraire, ou en l'absence de liant comme, par exemple, pour les granites, il faut abandonner la représentation schématique que nous avons définie et considérer un modèle de matériau granulaire à grains jointifs.

Pour mettre en évidence le seuil d'hétérogénéité, dans le cas de matériaux à granulométrie discontinue, nous avons étudié l'influence de la nature de la matrice sur le comportement élastique du modèle, en analysant l'état de déformations engendré par la singularité dans des matrices hétérogènes de granulométrie variable.

IV - 1. METHODE EXPERIMENTALE.

IV -11. Caractéristiques des échantillons.

Les matrices hétérogènes sont obtenues en ajoutant une charge calcaire de granulométrie variable à une résine époxyde. Le diamètre du plus gros grain de la charge est limité à l'épaisseur du modèle (e = 3 mm).

La composition et les caractéristiques des matrices ainsi réalisées sont résumées dans le tableau ci-après où E* représente le module d'YOUNG global de chaque matrice composite.

Type du modèle	Nature de la charge	Proportions du mélange (p.p)			E * daN/mm ²
		Résine	Durcisseur	Charge	
1	Farine de calcite 0 - 1μ	100	10	130	800
2	Farine de calcite 0 - 1μ + Calcite 0,8-1,5 mm	100	10	130 + 55	800
3	Farine de calcite 0 - 1μ + Calcite 1,5-3 mm	100	10	130 + 55	225

Résine : Araldite CY (230) (CIBA)
Durcisseur : HY 951 (CIBA)
Agent démoulant : QZ 13 (CIBA)

Les singularités sont soit en acier, soit en matériau photoélastique. Leur diamètre est de 12 mm ou de 20 mm.

IV -12. Principe de la mesure.

Nous avons déterminé les états de déformations dans la matrice et dans la singularité.

IV -121. Dans la matrice.

Les matériaux utilisés pour la réalisation des matrices hétérogènes ne sont pas transparents. On ne peut donc plus analyser la déformation de la matrice en photoélasticité par transmission.

La photoélasticimétrie par réflexion nécessite le collage d'un revêtement biréfringent réfléchissant d'une épaisseur comparable à celle de la plaque étudiée. Les mesures, déjà peu précises, seraient alors trop perturbées pour rester significatives.

Nous avons été ainsi conduit à employer des jauges à fil résistant.

L'inconvénient de cette technique est que la mesure réalisée est en fait la moyenne des déformations ponctuelles sur la base de la jauge. Les résultats de notre investigation perdent ainsi partiellement leur caractère local.

Nous avons veillé à atténuer cet inconvénient en utilisant des jauges de base suffisamment courte pour effectuer nos mesures au plus près de la singularité. Les dimensions de leur partie active, $6 \times 6 \text{ mm}^2$, restent cependant assez grandes pour que la mesure soit significative, même dans le cas des matrices du troisième type.

Nous avons mené notre expérimentation sur des modèles à matrices hétérogènes des trois types précédemment définis et sur le modèle à matrice homogène. Nous avons comparé les résultats obtenus dans l'un et l'autre cas pour observer directement l'influence de l'hétérogénéité de la matrice sur les perturbations du champ de déformation. Cette méthode nous dispense, en effet, de calculer la moyenne des déformations théoriques sur la base de chaque jauge, pour la comparer ensuite à l'information recueillie expérimentalement en chaque point de mesure, et allège ainsi considérablement la technique expérimentale.

Il convient de remarquer, par ailleurs, que les caractéristiques mécaniques globales, d'une part, et locales, d'autre part, des matériaux que nous avons fabriqués sont parfois bien différentes.

Or, à l'échelle des jauges, ce sont les secondes qui

jouent un rôle prépondérant dans la mesure que nous réalisons.

Pour éviter que leur détermination, inévitablement peu précise, ne rende alors nos mesures non significatives, nous avons limité notre étude aux deux cas pour lesquels les caractéristiques mécaniques globales de la matrice ne jouent aucun rôle : celui de l'inclusion rigide et celui du trou libre.

IV -122.. Dans l'inclusion.

Nous avons utilisé une inclusion photoélastique qui a été analysée par transmission.

Cela nous a permis d'observer les variations des isochromatiques et du réseau des isostatiques et de comparer les résultats de l'expérience à ceux du calcul théorique.

Pour traiter le cas d'une inclusion plus rigide que la matrice nous avons utilisé une singularité en verre ($E_0 = 6000 \text{ daN/mm}^2$) et, dans le cas contraire, une singularité en araldite photoélastique.

Les mesures expérimentales en photoélasticité ont été complétées par la mesure des déformations principales au centre de la singularité, à l'aide d'une rosette extensométrique.

IV -2. RESULTATS EXPERIMENTAUX.

IV -21. Etats de déformations et de contraintes dans la singularité.

Les expressions théoriques des composantes du tenseur contrainte en tout point de la singularité ont été établies au chapitre III.

Nous allons déterminer, à partir de ces expressions théoriques, les valeurs de $\sigma_1 - \sigma_2$ et l'orientation du repère principal pour faciliter la comparaison avec les résultats de l'observation photoélastique.

Ce calcul n'est possible littéralement que dans le cas de l'adhérence. Lorsque l'inclusion n'est pas adhérente nous avons vu qu'il fallait traiter les équations obtenues sur ordinateur.

$$\sigma_{or}(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} \beta_0 + \frac{p_1 - p_2}{2} \delta_0 \cos 2\theta$$

$$\sigma_{o\theta}(M) = \frac{p_1 + p_2}{2} \beta_0 - \frac{p_1 - p_2}{2} \delta_0 \cos 2\theta$$

$$\tau_{or\theta}(M) = - \frac{p_1 - p_2}{2} \delta_0 \sin 2\theta$$

d'où :
$$\operatorname{tg}_0 2\phi = \frac{2\tau_{or\theta}}{\sigma_{or} - \sigma_{o\theta}}$$

soit :

$$\operatorname{tg}_0 2\phi = \frac{-(p_1 - p_2)\delta_0 \sin 2\theta}{\frac{p_1 + p_2}{2}\beta_0 + \frac{p_1 - p_2}{2}\delta_0 \cos 2\theta - \frac{p_1 + p_2}{2}\beta_0 + \frac{p_1 - p_2}{2}\delta_0 \cos 2\theta}$$

$$\operatorname{tg}_0 2\phi = - \operatorname{tg} 2\theta$$

Les isostatiques sont, en tout point de la singularité suffisamment éloigné du contour, confondues avec les directions ox et oy , quel que soit le cas de charge.

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_0 = \sqrt{(\sigma_{or} - \sigma_{o\theta})^2 + 4\tau_{or\theta}^2}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_0 = 2\tau_{or\theta} \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta}} = - \frac{p_1 - p_2}{2} \delta_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta}} \cdot 2\sin 2\theta$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_0 = - (p_1 - p_2) \delta_0$$

Pour un couple de valeurs p_1 et p_2 donné et pour un modèle donné, le champ des isochromatiques est donc uniforme dans l'inclusion, sauf au voisinage immédiat du contact.

Les éléments de la comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux prennent donc, dans le cas de l'adhérence, une forme très simple.

Il convient de remarquer que la singularité est ainsi soumise à un champ uniforme de contraintes, puisque les isostatiques sont des droites parallèles.

Il n'existe donc pas de concentration de contraintes au voisinage de l'interface, ce qui semble infirmer les observations de DANTU (2) sur un modèle plan de béton.

Le comportement de la singularité peut paraître surprenant ; à première vue, on pourrait s'attendre, en effet, à ce que les isostatiques qui se concentrent pour entrer dans la singularité, s'évasent en son centre puis se concentrent à nouveau pour en sortir.

Cependant l'allure du réseau des isostatiques que nous avons obtenu nous permet d'apporter une explication à des figures de rupture observées par de nombreux expérimentateurs. L'absence de concentration de contraintes dans l'inclusion permet, en effet, d'expliquer que, lorsque la rupture se produit dans la singularité, la ligne de rupture soit une corde. La concentration des contraintes se produit au contact, très localement, dans la matrice, ce qui explique que les ruptures se manifestent généralement au niveau des collages.

IV -212. Résultats de l'analyse photoélastique.

Dans le cas de l'adhérence, l'analyse des modèles de types 1 et 2, qui contiennent les éléments les plus fins, nous permet d'observer dans les singularités en verre et en araldite, de diamètres 12 et 20 mm des réseaux d'isostatiques et des champs d'isochromatiques tout à fait conformes à ceux que nous avons déterminés par le calcul théorique.

Le tableau ci-après regroupe les valeurs théoriques et expérimentales de $(\sigma_1 - \sigma_2)_0$.

Dans le cas de modèles de type 3, on observe des figures d'isochromatiques et d'isostatiques conformes à la théorie lorsque la singularité a un diamètre de 20 mm, avec toutefois quelques perturbations locales dans le voisinage de l'interface.

Lorsque le diamètre de la singularité est de 12 mm, ces perturbations sont très importantes et atteignent le centre de la singularité.

L'analyse photoélastique des modèles à singularité non-adhérente nous permet d'observer un champ d'isochromatiques et un réseau d'isostatiques analogues à ceux d'un disque sollicité en compression ponctuelle diamétrale.

C'est ce qui correspond à la résolution théorique du problème.

p ₁	p ₂	Singularité en verre		Singularité en araldite	
		($\sigma_1 - \sigma_2$) ₀ exp.	($\sigma_1 - \sigma_2$) ₀ th.	($\sigma_1 - \sigma_2$) ₀ exp.	($\sigma_1 - \sigma_2$) ₀ th.
1	0	1,4	1,45	0,6	0,63
1	1	0	0	0	0
2	1	1,4	1,45	0,6	0,63
3	1	2,9	2,91	1,2	1,26
4	1	4,4	4,37	1,9	1,89
5	1	5,8	5,82	2,5	2,52

Il faut toutefois remarquer que le comportement de la singularité est, dans le cas de la non-adhérence, très peu affecté par l'hétérogénéité de la matrice puisque les arcs en contact sont de très faible longueur. Nous ne développerons donc pas davantage l'analyse de ce type de liaison.

IV -213. Résultats de l'analyse par jauges à fil résistant.

L'implantation de la rosette extensométrique est définie sur la figure IV-1. Les résultats des mesures sont présentés dans les tableaux ci-après.

Les modèles de types 1 et 2 ont des matrices de même module d'élasticité : les résultats qui leur sont relatifs sont donc groupés dans un même tableau.

Dans le cas de l'inclusion en verre, rigide par rapport aux matrices des trois types, nous avons groupé tous les résultats dans un même tableau puisqu'ils sont indépendants des caractéristiques de la matrice ($E_0 \gg E$).

MESURE DES DEFORMATIONS DANS LA SINGULARITE

Implantation de la rosette

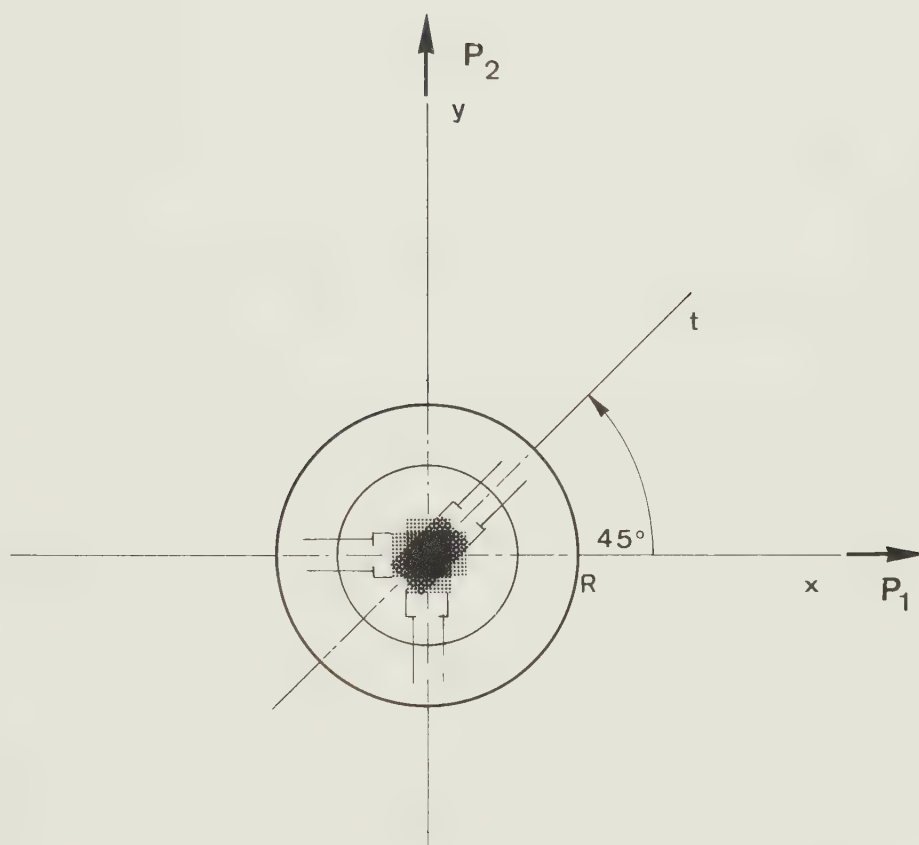


FIG. IV - 1

p_1	p_2	$\epsilon_y \cdot 10^{-6}$	$\epsilon_x \cdot 10^{-6}$	$\epsilon_t \cdot 10^{-6}$	$\frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \sigma_x$	$\frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \sigma_y$
1	1	180	180	190	252	252
2	1	50	500	250	520	250
3	1	- 80	825	330	793	250
4	1	- 200	1170	420	1090	268
5	1	- 350	1475	525	1335	240

Tableau IV-1 - Modèles 1 et 2
Analyse de l'état de déformations dans la singularité en araldite.

On peut remarquer, dans chaque cas, que la déformation ϵ_t , suivant la première bissectrice du repère oxy, est égale à la demi-somme des déformations ϵ_x et ϵ_y mesurées suivant les axes ox et oy.

Ceci confirme l'orientation du repère principal suivant les directions ox et oy.

p_1	p_2	$\sigma_x \text{ exp.}$	$\sigma_x \text{ th.}$	$\sigma_y \text{ exp.}$	$\sigma_y \text{ th.}$
1	1	0,69	0,67	0,69	0,67
2	1	1,42	1,32	0,68	0,68
3	1	2,16	1,97	0,68	0,70
4	1	2,97	2,61	0,73	0,72
5	1	3,64	3,26	0,66	0,74

Tableau IV-2 - Modèles 1 et 2 (araldite)
Comparaison des états de contraintes expérimentaux et théoriques dans la singularité.

p_1	p_2	$\epsilon_x \cdot 10^{-6}$	$\epsilon_y \cdot 10^{-6}$	$\epsilon_t \cdot 10^{-6}$	$\frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \sigma_x$	$\frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \sigma_y$
1	1	326	324	332	455	456
2	1	763	153	431	824	458
3	1	1193	- 25	566	1183	453
4	1	1574	- 185	677	1501	445
5	1	1845	- 185	812	1771	554

Tableau IV-3 - Modèle 3
Analyse de l'état de déformations dans la singularité en araldite.

p_1	p_2	σ_x exp.	σ_x th.	σ_y exp.	σ_y th.
1	1	1,23	1,19	1,23	1,19
2	1	2,23	2,39	1,23	1,18
3	1	3,20	3,60	1,22	1,16
4	1	4,30	4,80	1,20	1,15
5	1	4,78	6,00	1,44	1,13

Tableau IV-4 - Modèle 3 (araldite)
Comparaison des états de contraintes expérimentaux et théoriques dans la singularité.

p_1	p_2	$\varepsilon_x 10^{-6}$	$\varepsilon_y 10^{-6}$	$\varepsilon_t 10^{-6}$	$\frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \sigma_x$	$\frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \sigma_y$
1	1	30	35	30	39	39
2	1	70	18	50	75,4	39
3	1	105	0	60	105	31,5
4	1	150	- 10	80	147	35
5	1	200	- 25	90	192,5	35

Tableau IV-5 - Modèles 1, 2 et 3
Analyse de l'état de déformations dans la singularité en verre.

p_1	p_2	σ_x exp.	σ_x th.	σ_y exp.	σ_y th.
1	1	1,39	1,35	1,35	1,39
2	1	2,68	2,75	1,30	1,39
3	1	3,74	4,16	1,24	1,12
4	1	5,23	5,56	1,19	1,24
5	1	6,85	6,96	1,14	1,25

Tableau IV-6 - Modèles 1, 2 et 3 (verre)
Comparaison des états de contraintes expérimentaux et
théoriques dans la singularité.

MESURE DES DEFORMATIONS DANS LA MATRICE

Implantation des jauges

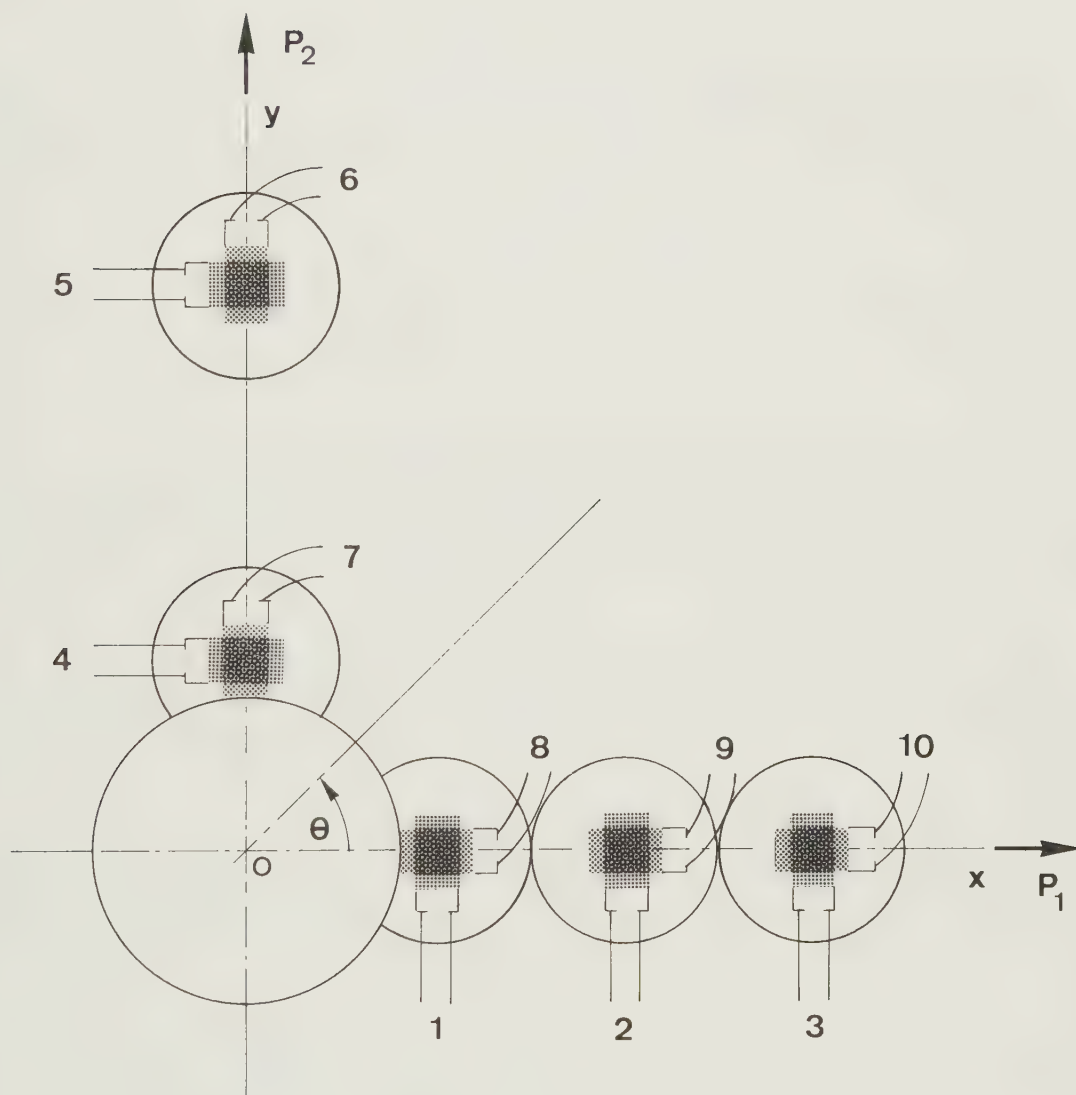


FIG. IV - 2

IV -22. Etats de déformations et de contraintes dans la matrice.

Nous n'avons pas étudié le comportement des modèles à singularité de diamètre 12 mm puisqu'il résulte de l'analyse photoélastique précédente que pour les modèles de types 1 et 2 le comportement élastique est le même, que le diamètre de la singularité soit égal à 12 ou à 20 mm, alors que pour le modèle de type 3 nous sommes déjà au-delà du seuil d'hétérogénéité.

Les résultats expérimentaux sont résumés sur les figures IV-3 à IV-18 où sont représentées, simultanément sur chaque diagramme, les déformations mesurées sur les axes de chargement dans les trois types de matrices hétérogènes, d'une part, et dans la matrice homogène, d'autre part.

IV -23. Conclusions - Définition d'un "seuil d'hétérogénéité".

La comparaison des états de déformations et de contraintes, théoriques et expérimentaux, dans la singularité et des états de déformations dans la matrice pour des matériaux à hétérogénéité variable, montre que pour la singularité de diamètre 20 mm l'influence de la nature de la matrice n'est pas sensible.

Par contre, pour la singularité de 12 mm, le rôle de l'hétérogénéité est manifeste puisque le comportement de la matrice de type 3 est différent de celui de la matrice homogène du modèle élémentaire.

Soient ϕ_m et ϕ_0 respectivement le diamètre maximal des grains de la matrice et celui de la singularité du modèle. Nous pouvons résumer nos observations par les relations ci-après, s étant le seuil d'hétérogénéité.

$\exists s \in R :$

$\forall \phi_m, \frac{\phi_m}{\phi_0} \geq s : \text{"le comportement du modèle n'est plus celui du modèle à singularité unique".}$

$\forall \phi_m, \frac{\phi_m}{\phi_0} < s : \text{"le comportement du modèle est identique à celui du modèle à singularité unique".}$

Les expériences que nous venons de décrire nous permettent d'écrire :

$$\frac{3}{20} < s < \frac{3}{12}$$

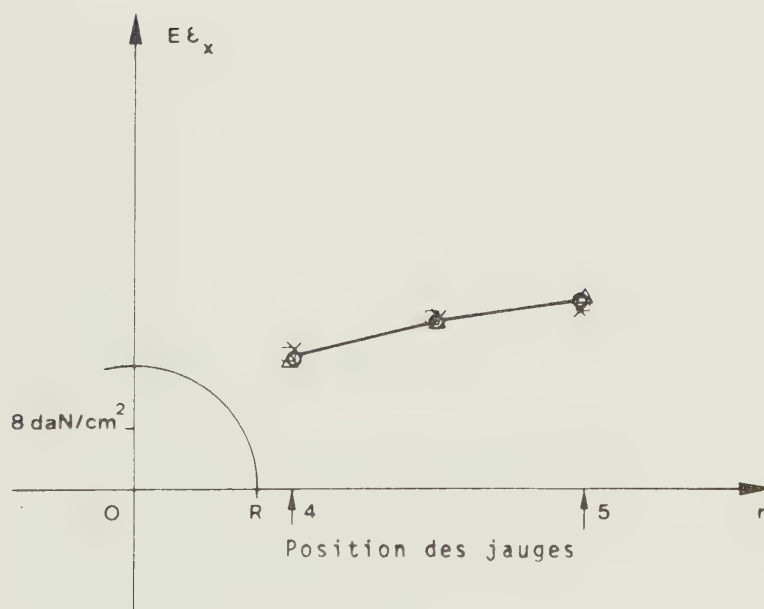
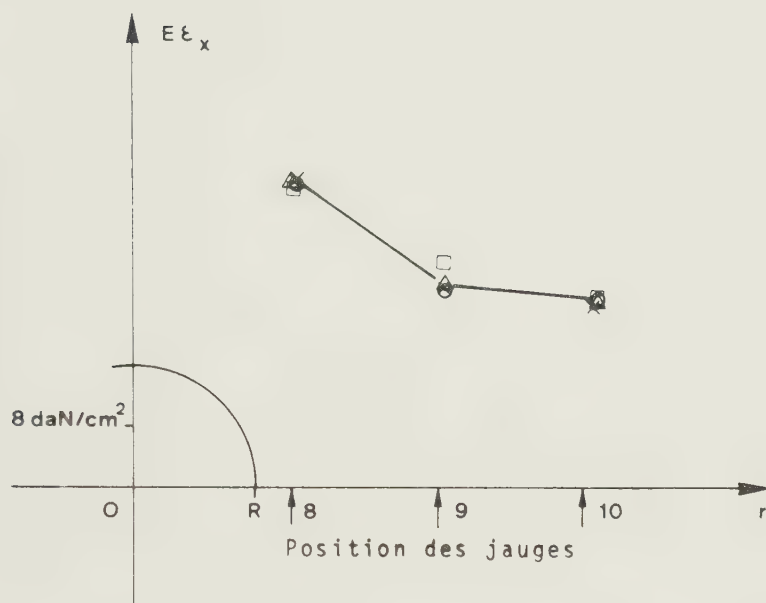
IV -3. CONCLUSIONS. DEFINITION D'UN SEUIL D'HETEROGENEITE.

Il résulte de l'étude que nous venons de mener qu'on peut effectivement admettre qu'un matériau granulaire cohérent à granulométrie discontinue soit considéré, en première approximation, comme un matériau à deux phases homogènes lorsque le rapport des diamètres du plus gros grain de la classe des éléments fins au plus petit grain de la classe des gros éléments est suffisamment faible.

Ceci nous permet en particulier ainsi que l'ont fait DANTU et, à sa suite, MASO d'assimiler, dans un béton, le mortier à un milieu homogène par rapport aux cailloux, lorsque le plus gros grain du mortier est très petit par rapport aux cailloux.

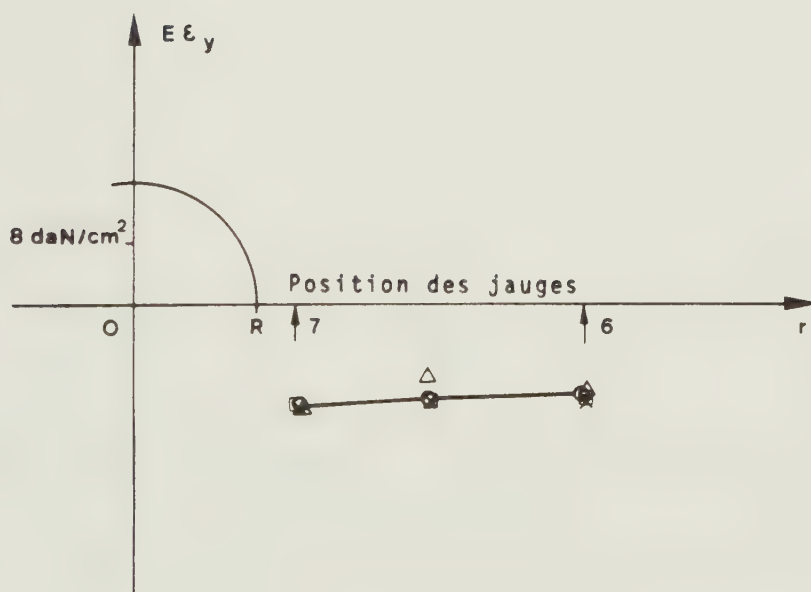
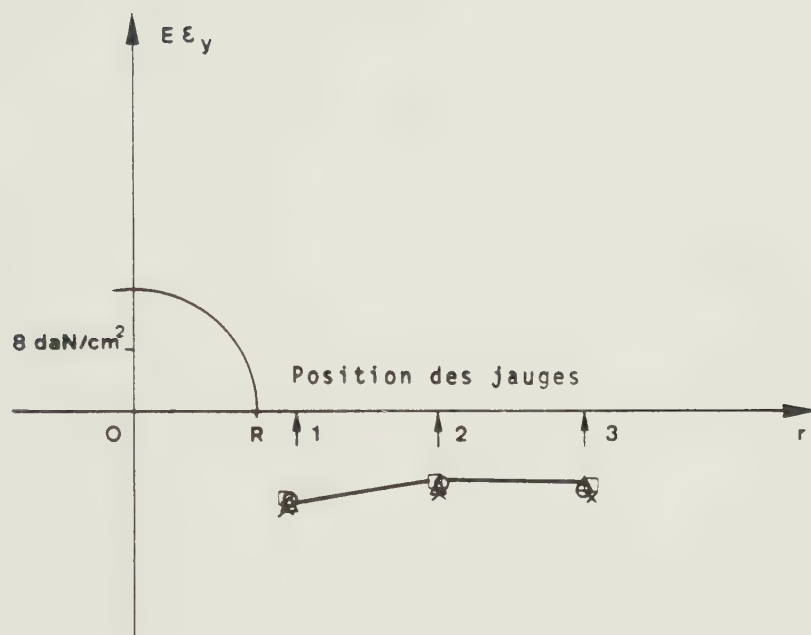
En l'absence de gros granulats il faut considérer les mortiers très fins, ou les pâtes pures de ciment, comme des milieux hétérogènes.

FIGURES REPRESENTANT L'ETAT DE
DEFORMATIONS DANS LA MATRICE.
MESURES PAR JAUGES A FIL RESISTANT

$E_0 \gg E$, MONOAXIAL


- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

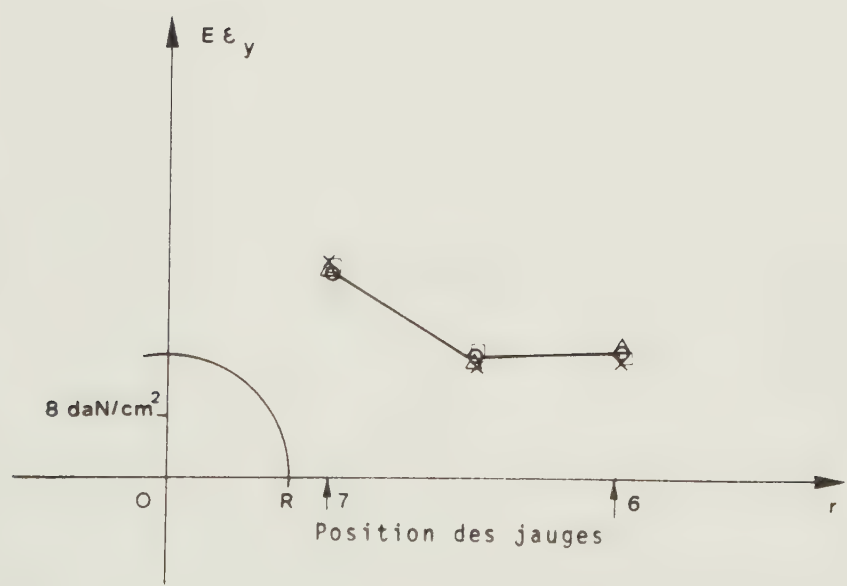
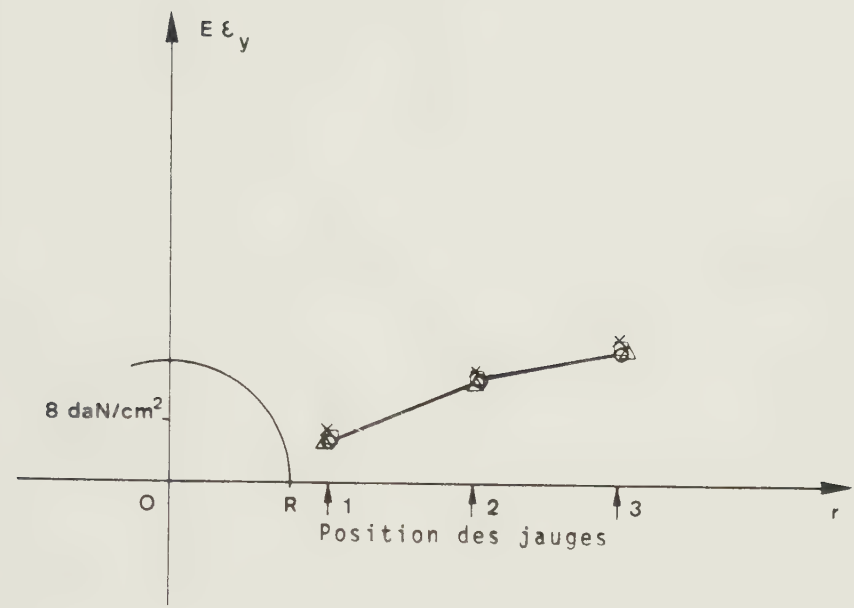
FIG. IV - 3

$E_0 \gg E$, MONOAXIAL


- o matrice de type 1
- Δ matrice de type 2
- $\square$ matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV - 4

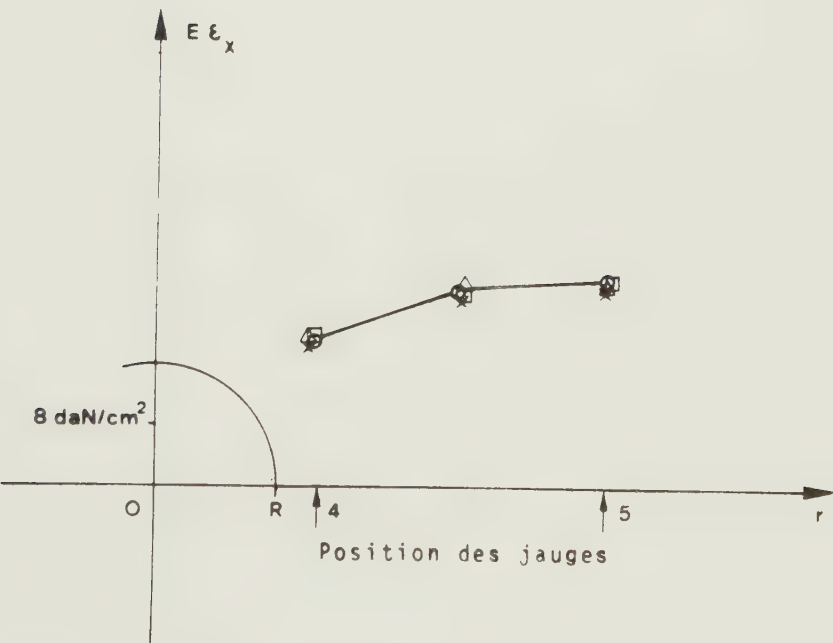
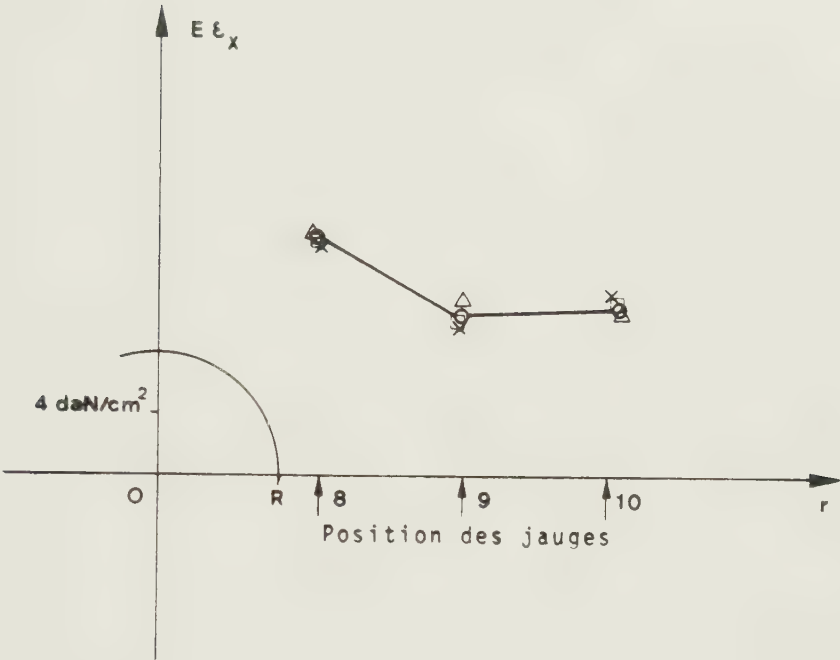
$E_o \gg E$, BIAXIAL $\frac{P_1}{P_2} = 1$



- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV - 5

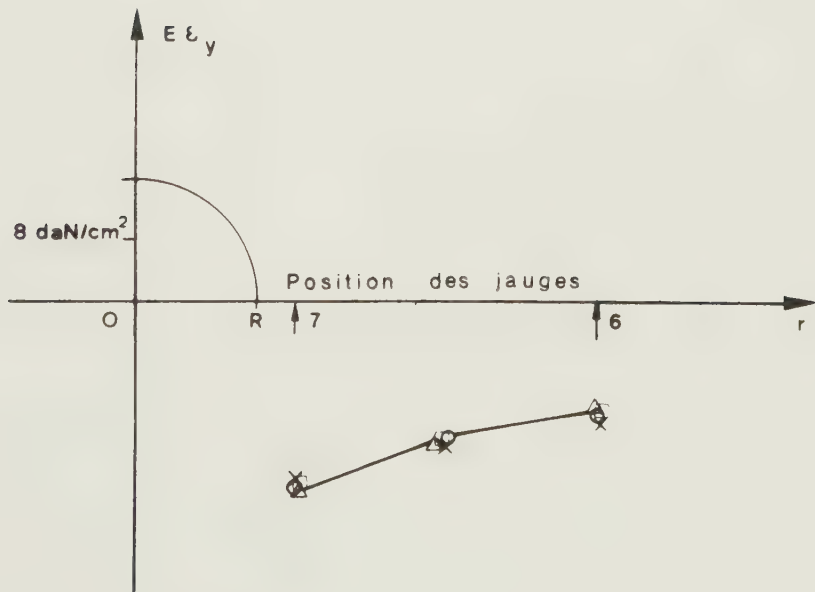
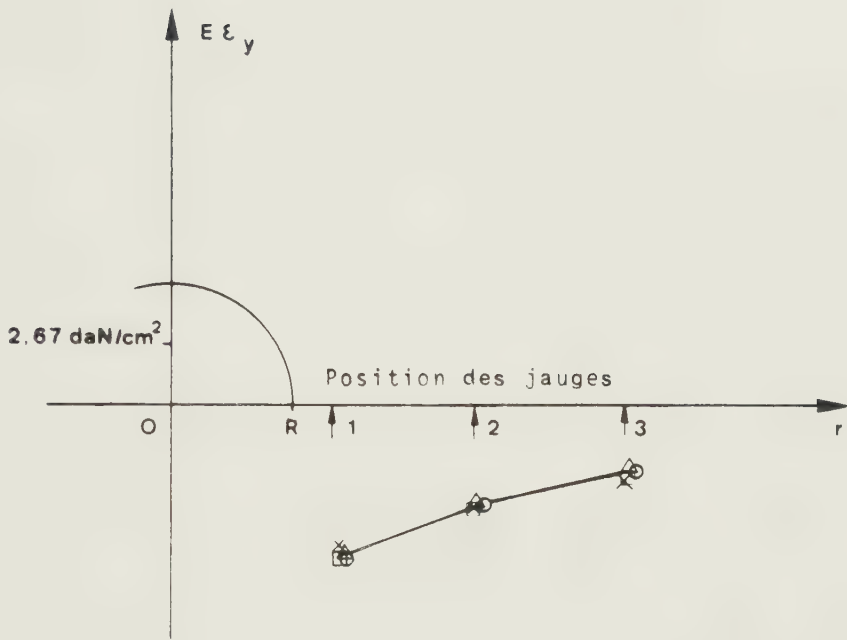
$E_0 \gg E$, BIAXIAL $\frac{P_1}{P_2} = 2$



- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV - 6

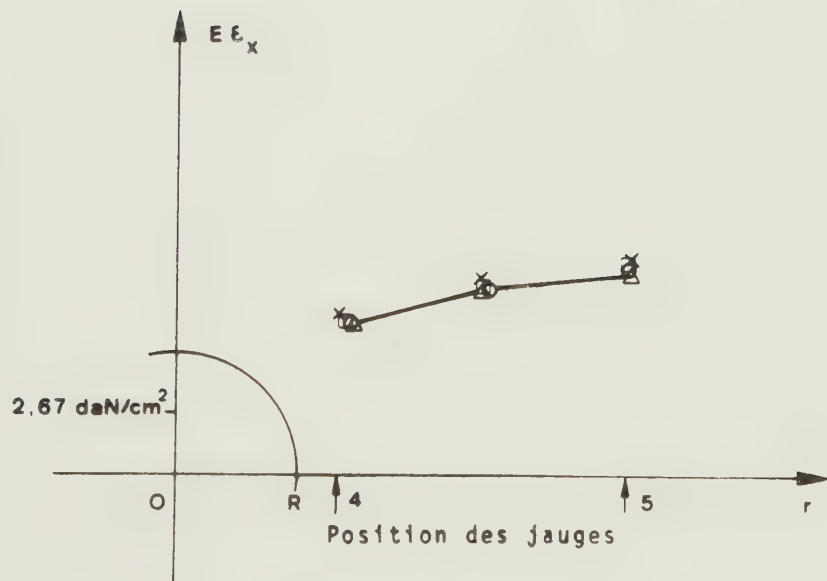
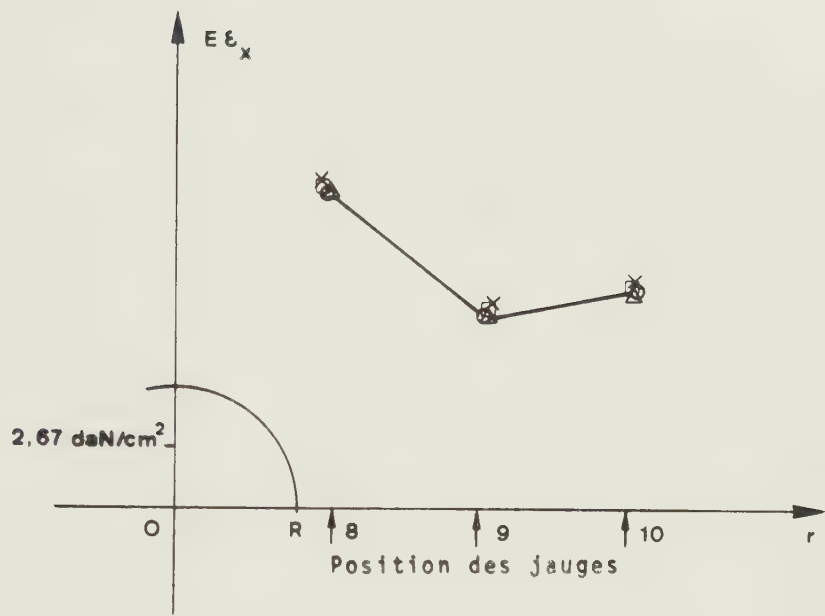
$E_0 \gg E$, BIAxIAL $\frac{P_1}{P_2} = 3$



- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV- 7

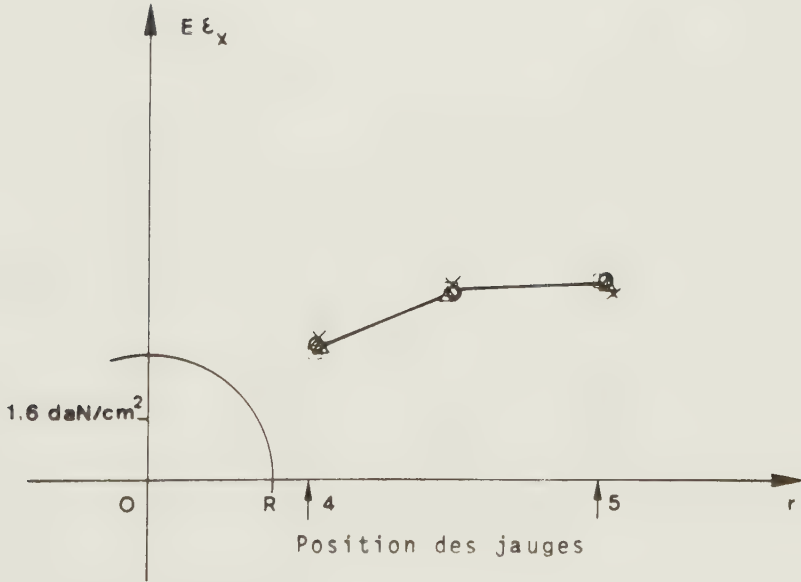
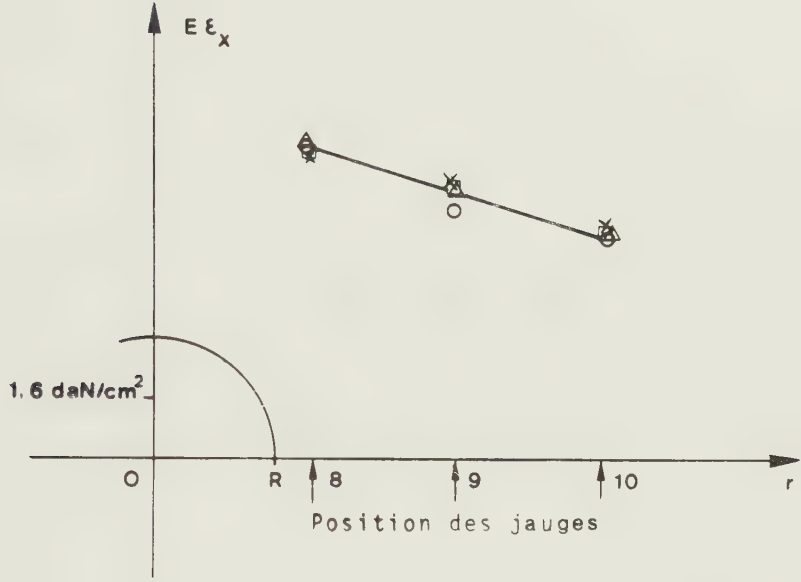
$E_o \gg E$, BIAxIAL $\frac{P_1}{P_2}=4$



- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV-8

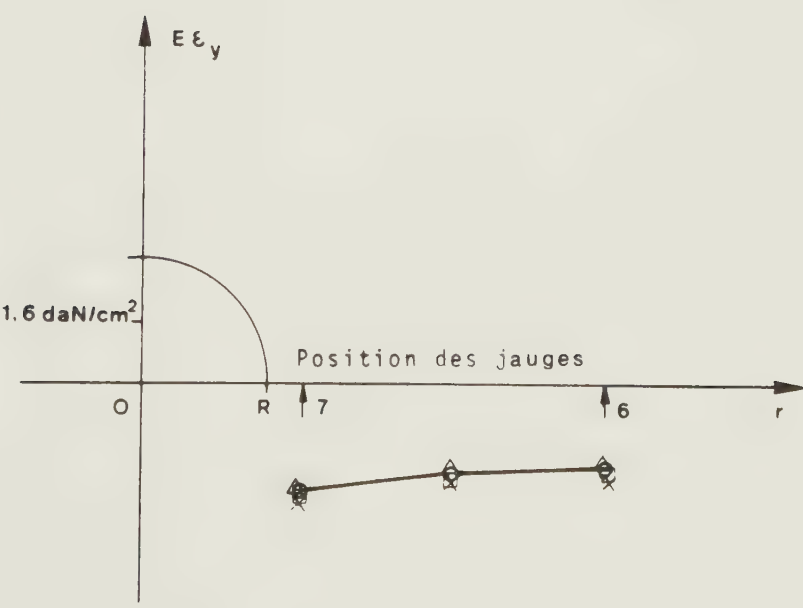
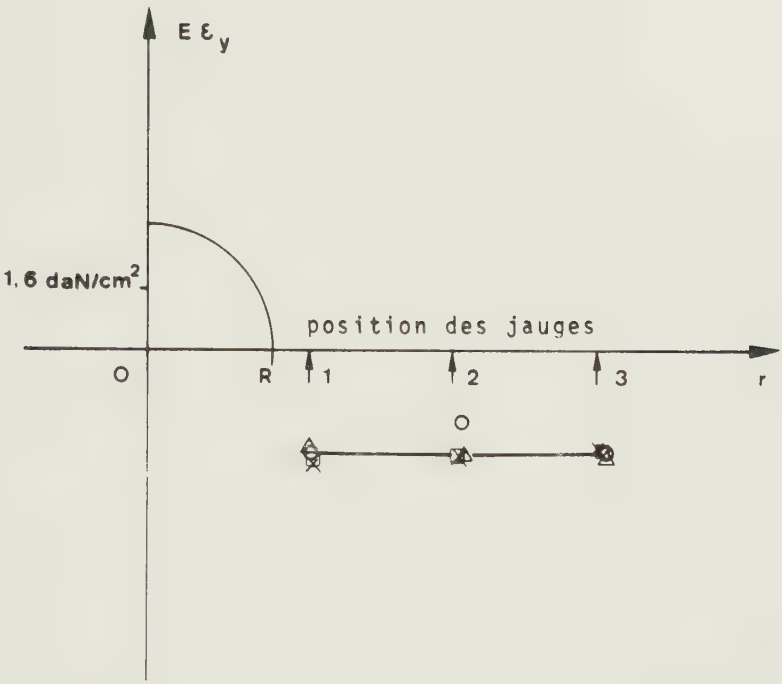
$E_0 \gg E$, BIAXIAL $\frac{P_1}{P_2} = 5$



- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV-9

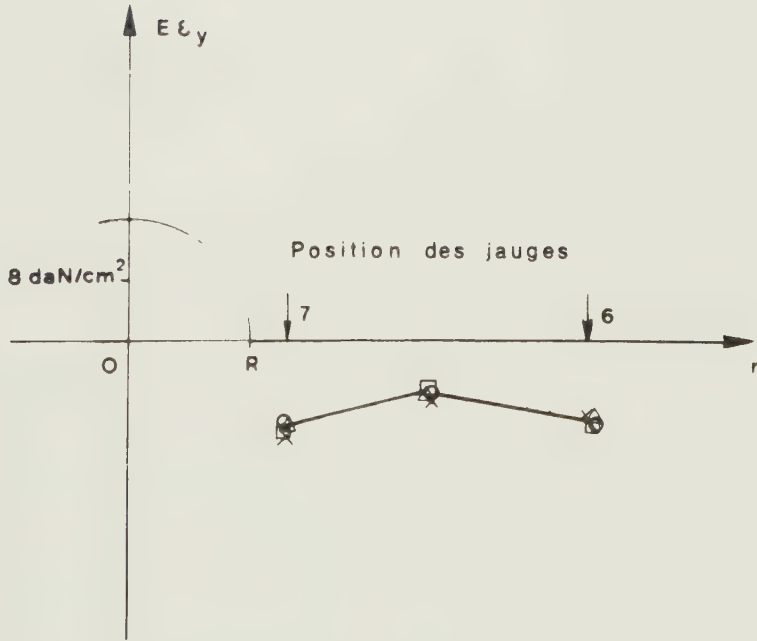
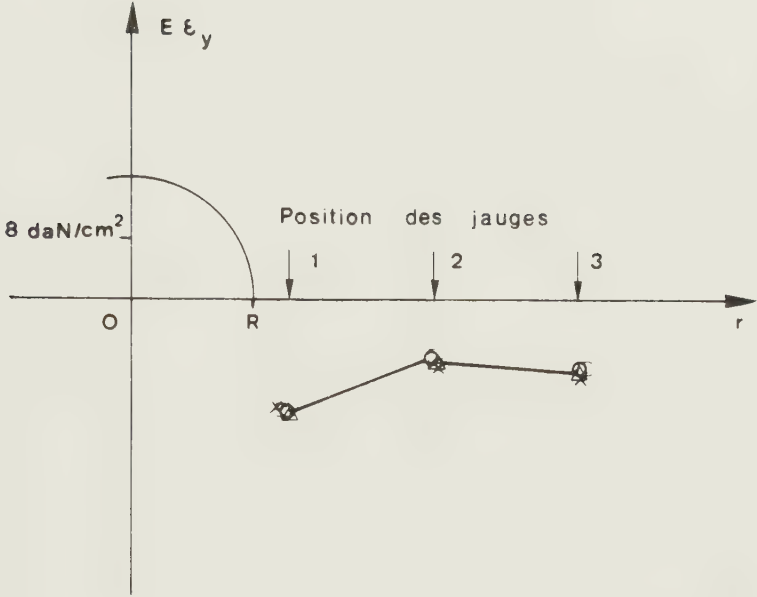
$$E_o \gg E \quad , \quad \text{BIAXIAL} \quad \frac{P_1}{P_2} = 5$$



- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV - 10

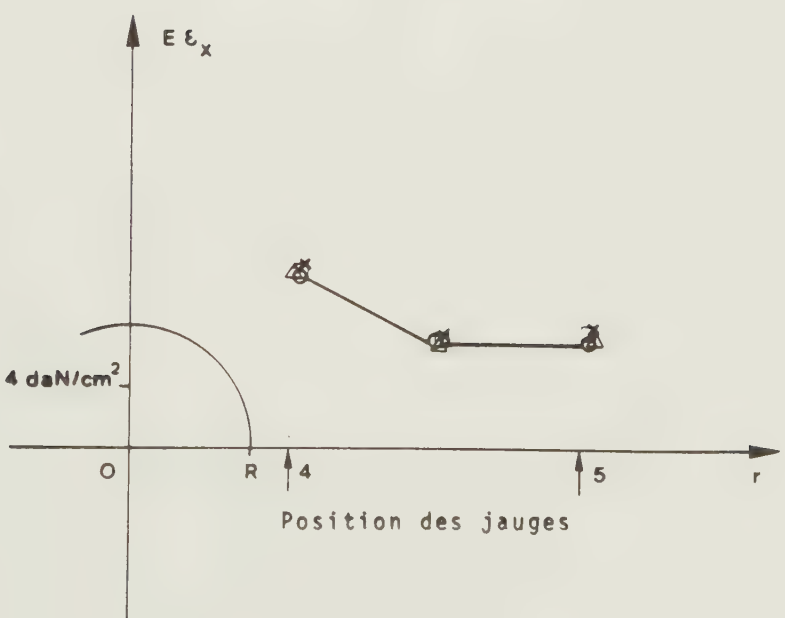
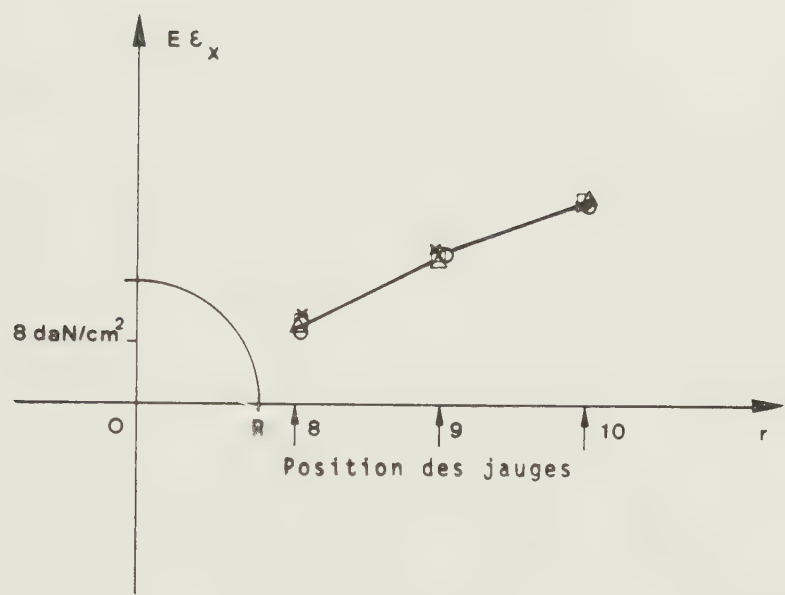
$$E_0 = 0 \quad , \quad \text{MONOAXIAL}$$



- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV - 11

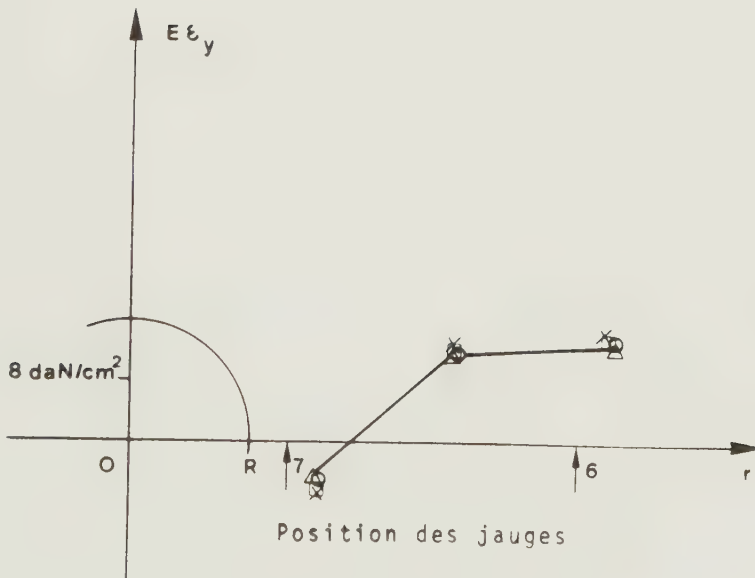
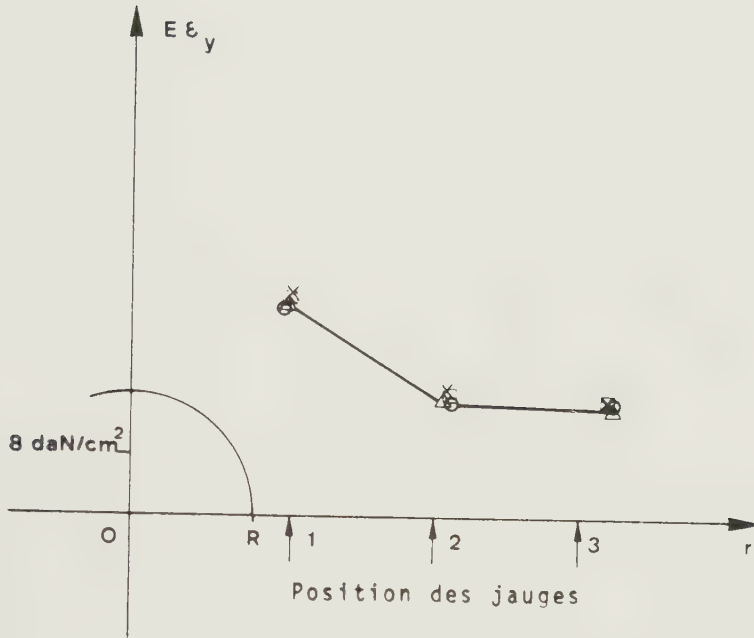
$E_o = 0$, MONOAXIAL



- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV-12

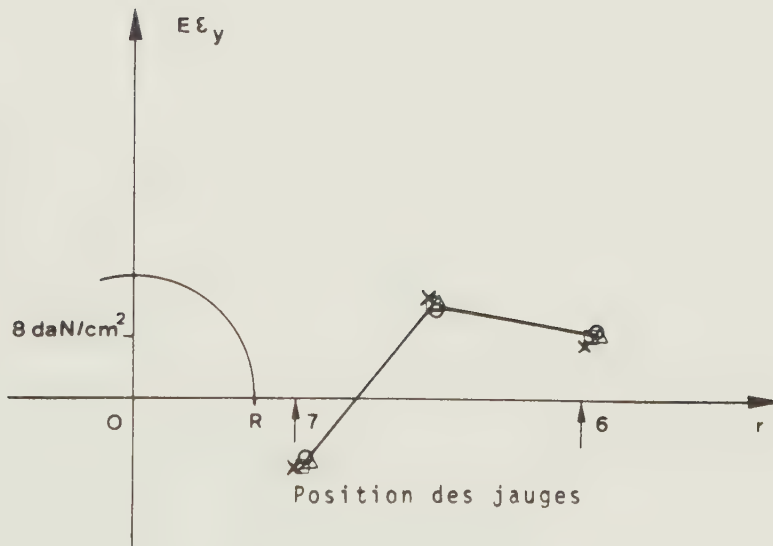
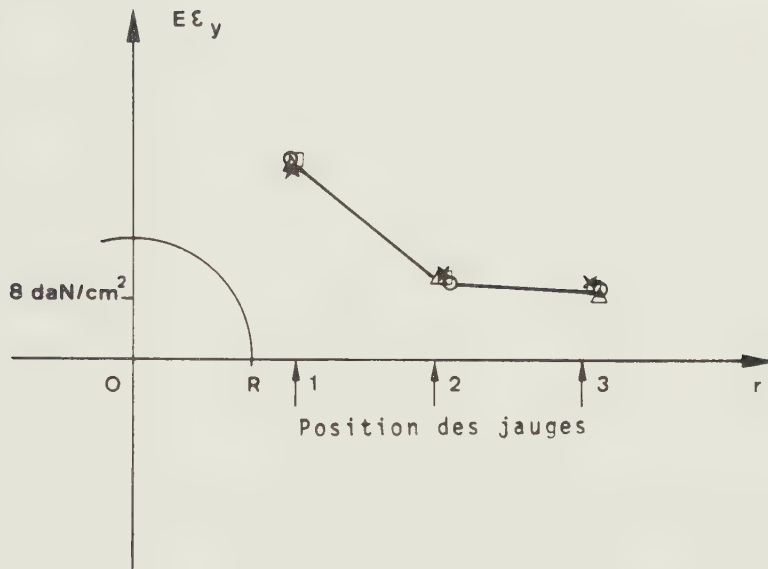
$$E_0 = 0 \text{ , BIAXIAL } \frac{P_1}{P_2} = 1$$



- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV-13

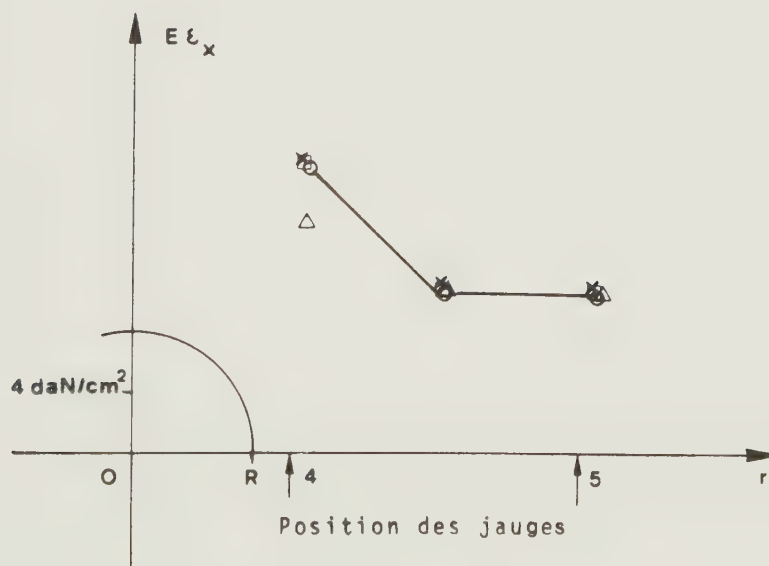
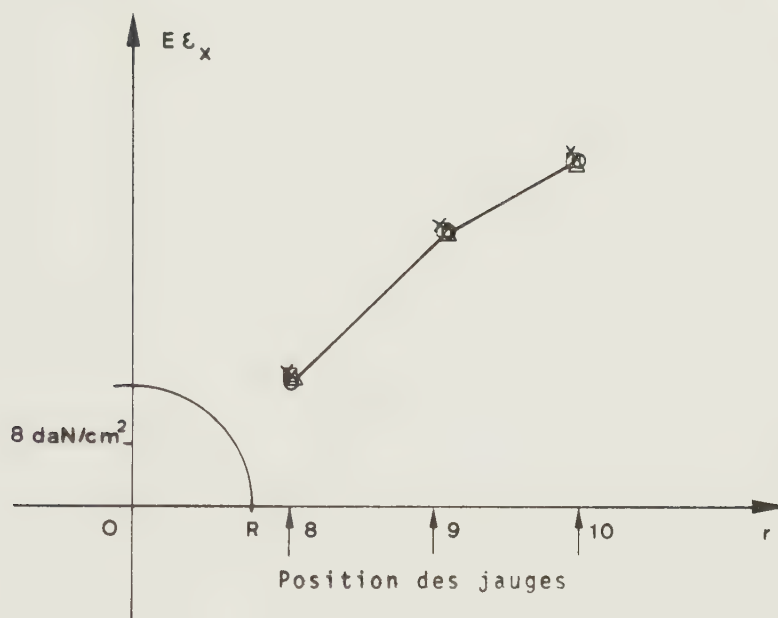
$$E_o = 0 \quad , \quad \text{BIAXIAL} \quad \frac{P_1}{P_2} = 2$$



- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV - 14

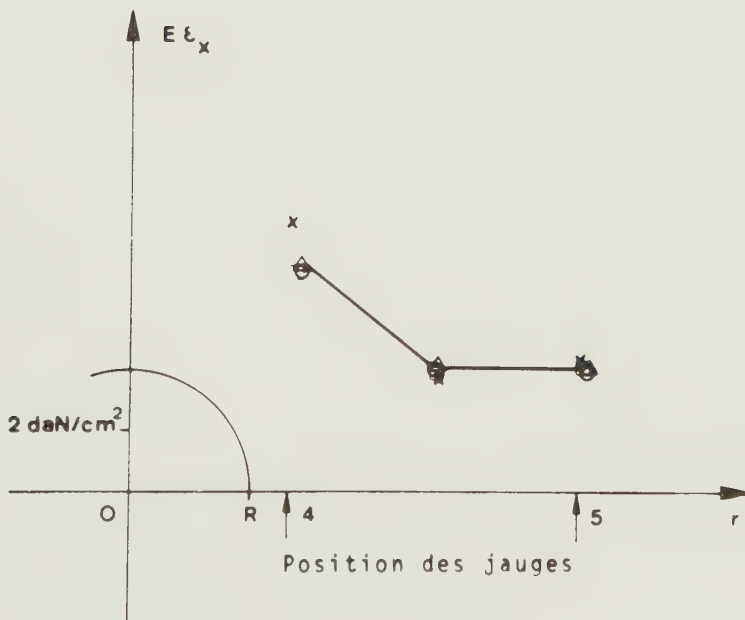
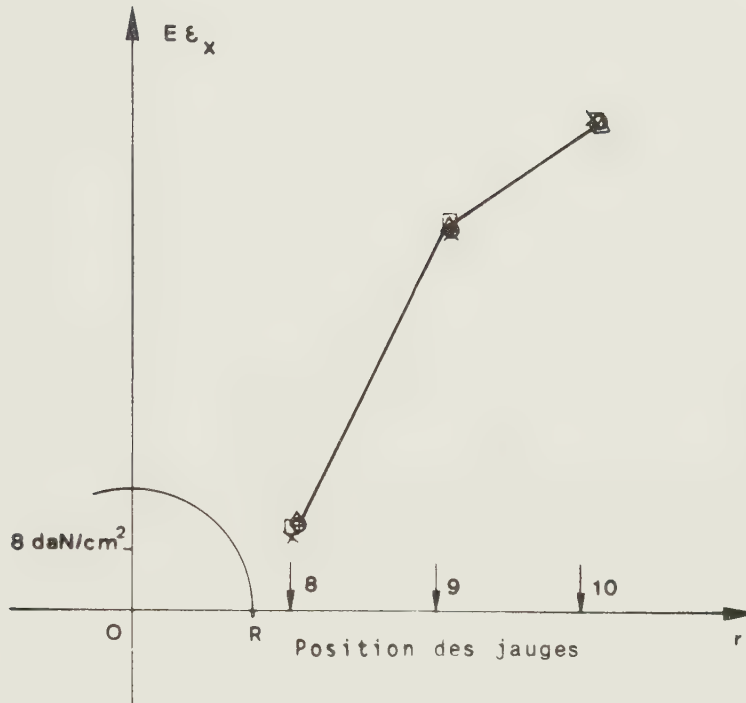
$$E_0 = 0 \quad , \quad \text{BIAXIAL} \quad \frac{P_1}{P_2} = 2$$



- o matrice de type 1
- Δ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV - 15

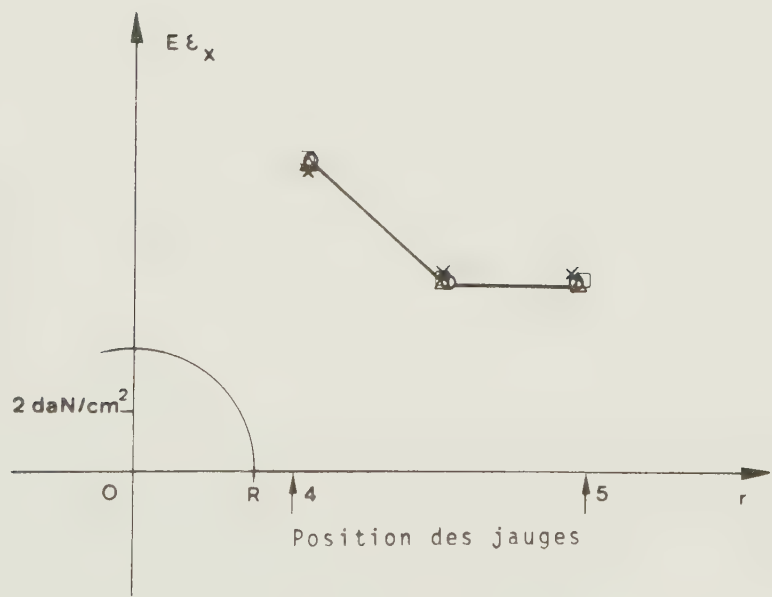
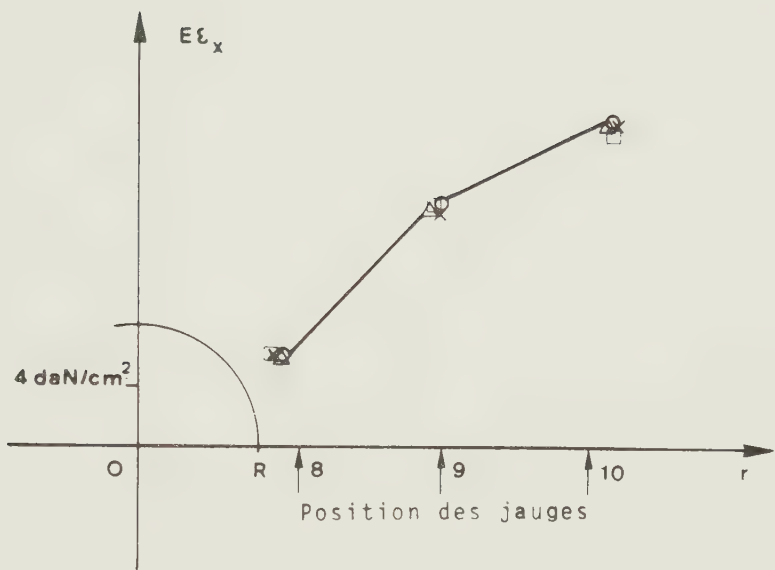
$$E_0 = 0 \quad , \quad \text{BIAXIAL} \quad \frac{P_1}{P_2} = 3$$



- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV - 16

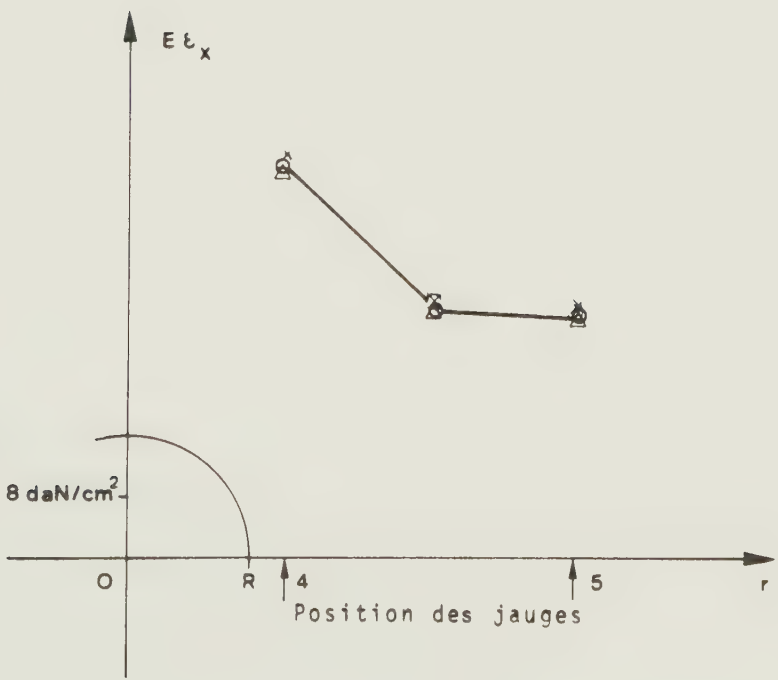
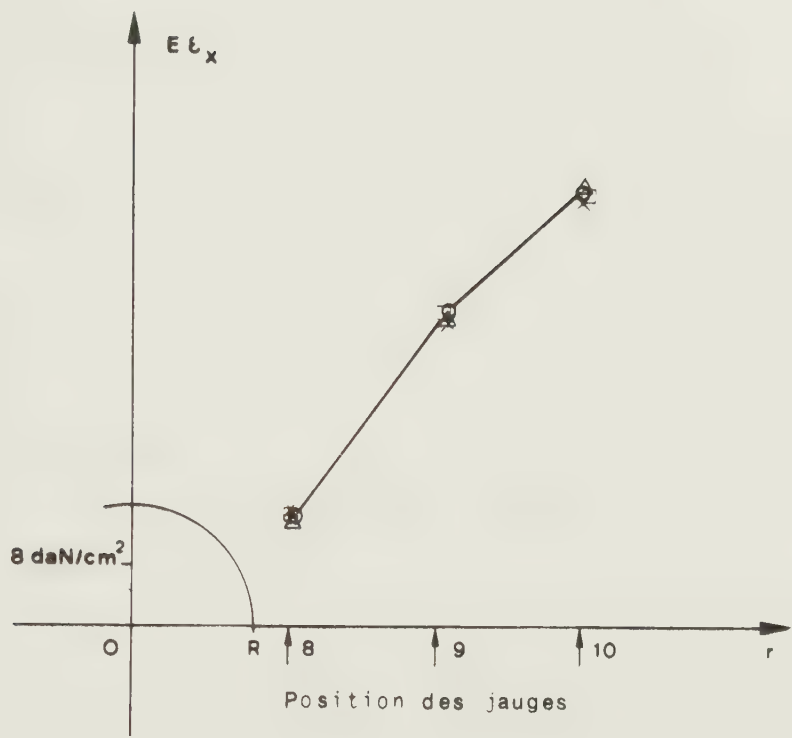
$E_o = 0$, BIAXIAL $\frac{P_1}{P_2} = 4$



- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV -17

$E_o = 0$, BIAXIAL $\frac{P_1}{P_2} = 5$



- o matrice de type 1
- △ matrice de type 2
- matrice de type 3
- x matrice homogène

FIG. IV- 18

DEUXIEME PARTIE

ETUDE DU COMPORTEMENT DU MODELE ELEMENTAIRE
A LA LIMITE DU DOMAINE DE REVERSIBILITE.
APPLICATION AUX MORTIERS ET BETONS.

La connaissance des distributions théoriques des contraintes et des déformations dans la matrice et dans la singularité, confirmées par l'expérience, nous permet d'analyser le comportement du modèle élémentaire de matériau granulaire cohérent à la frontière du domaine de réversibilité.

Dès lors qu'on connaît, en effet, les critères de limite de réversibilité auxquels obéissent les deux phases homogènes en présence, on peut déterminer, pour une sollicitation donnée, en quels points l'état limite est atteint.

On peut ainsi définir avec précision les zones où apparaissent les premières plastifications ou les premières fissures, selon la nature du matériau qui passe au-delà de la limite de réversibilité.

On peut ensuite prévoir, mais d'une manière alors moins rigoureuse, l'évolution de cette plastification ou de cette fissuration jusqu'à la ruine de l'échantillon étudié.

Lorsqu'on ne connaît pas les critères auxquels obéissent les deux phases homogènes, on peut, dès lors qu'on dispose d'observations expérimentales suffisamment fines de l'apparition des premiers désordres irréversibles, tenter de définir les lois du passage à l'état limite réversible.

Il convient de remarquer que la connaissance expérimentale des figures de rupture ne peut donner qu'une image approchée des critères recherchés. Il est essentiel, en effet, de savoir en quels points se manifestent exactement les premiers désordres pour sélectionner parmi les critères connus, ou analysés, celui qui permet d'apporter l'explication complète et satisfaisante au comportement du matériau.

Nous avons été conduit, dans notre travail, à utiliser le second mode de raisonnement, c'est-à-dire la détermination indirecte du critère de limite de réversibilité, puisque nous considérons l'ensemble des matériaux granulaires cohérents. De plus, au niveau de l'application aux mortiers et bétons, il semble que le critère de CAQUOT généralement adopté par les auteurs, ne puisse expliquer complètement le comportement de ces matériaux. Le critère d'extension maximale de BRANDENBERGER (14, 15), retenu par MASO, apporte une explication plus complète et plus satisfaisante aux phénomènes observés en compression ou traction.

Il était donc indispensable de reprendre, d'une manière exhaustive et avec la plus grande rigueur, l'étude des critères de réversibilité des mortiers et bétons.

Dans un premier chapitre nous avons précisé la méthode d'étude que nous avons suivie ainsi que les paramètres que nous avons fait varier.

Dans le second chapitre nous avons tenté de définir le critère de réversibilité pour le modèle théorique de béton, en comparant nos conclusions théoriques aux observations de CALVET (3) et de BUYUKOZTURK, NILSON et SLATE (16).

CHAPITRE V

GENERALITES ET METHODE D'ETUDE

Les résultats théoriques et expérimentaux des chapitres II et III de la première partie montrent que le voisinage de la singularité est davantage sollicité que le reste de la matrice et que les extrema des contraintes sont toujours atteints à l'interface.

C'est pourquoi, lorsque la rupture ne se produit pas d'abord dans les granulats, c'est au niveau des contacts entre ceux-ci et la matrice que se manifestent les premiers désordres irréversibles, plastification locale ou microfissuration, selon que la matrice a un comportement de type écrouissable ou fragile.

Dans le cas particulier d'une matrice fragile nous pouvons confondre irréversibilité et fissuration locale. Ce sera le cas des mortiers et bétons pour lesquels le liant a un comportement fragile vis à vis des sollicitations de traction ou des déformations d'extension.

Nous avons limité nos investigations au cas où l'irréversibilité se produit dans la matrice.

La méthode d'analyse que nous proposons peut cependant s'appliquer de la même manière au cas où elle se produit dans le granulat.

V -1. METHODE D'ETUDE.

V -11. Définition de l'état limite réversible en un point.

Lorsqu'un critère est défini par des relations, en contraintes ou en déformations, de la forme :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = H$$

$$g(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = K$$

ou H et K sont des constantes caractéristiques du matériau étudié, on peut, même lorsqu'on ne connaît pas numériquement H et K, déterminer les points qui seront les premiers à la limite du domaine de réversibilité.

Ce sont ceux pour lesquels la fonction f ou g passe par un maximum absolu dans le solide étudié.

La connaissance des valeurs de H ou de K permet de définir la valeur de la sollicitation appliquée pour laquelle le passage à l'état limite est obtenu.

Nous avons utilisé cette méthode, par homothétie, pour étudier le comportement, à la limite, du modèle de matériau granulaire cohérent.

V -12. Définition de la frontière du domaine de réversibilité.

Nous avons étudié l'allure de la frontière du domaine de réversibilité tracée dans le plan R^2 des contraintes extérieures p_1 , p_2 , appliquées au modèle.

Les lois du passage à l'état limite réversible sont, en effet, généralement étudiées dans l'espace abstrait R^3 des contraintes, où l'on représente géométriquement le domaine de réversibilité par le volume dont la surface a pour équation l'expression du critère.

Dans le cas de solides homogènes, et pour des champs de contraintes uniformes, il y a identité entre les tenseurs des contraintes locales et le tenseur des contraintes appliquées au solide.

On peut alors donner une signification concrète à la surface précédente puisqu'elle est la représentation spatiale des états de sollicitation limite pour n'importe quel trajet de chargement.

On peut également tracer, par l'expérience, des coupes planes de cette surface.

Lorsque le matériau étudié est hétérogène, nous avons montré qu'il n'est plus possible d'identifier les composantes des tenseurs des contraintes locales et des contraintes extérieures appliquées. Il faut alors distinguer deux référentiels différents, que nous qualifierons l'un de "local" et l'autre de "global", selon que les quantités portées sur les axes de coordonnées sont les contraintes principales locales ou les contraintes extérieures appliquées.

Seul le second référentiel peut se prêter à la représentation graphique des résultats expérimentaux lors de sollicitations biaxiales.

C'est dans ce repère que l'on connaît l'allure de la trace dans le plan (p_1, p_2) de la surface d'état limite réversible de certains milieux granulaires cohérents.

C'est une courbe que l'on appelle parfois, notamment dans la littérature anglo-saxonne, courbe enveloppe des contraintes à l'état limite réversible (*).

Nous avons choisi de présenter nos résultats théoriques dans ce référentiel global pour en faciliter la comparaison avec les conclusions des autres auteurs.

Pour tracer la courbe représentant la frontière du domaine de réversibilité, nous avons reporté, par homothétie à partir de la valeur de la fonction critère obtenue pour une sollicitation monoaxiale unitaire, les valeurs maximales de cette fonction pour chaque valeur du rapport p_1/p_2 .

$$\gamma = \frac{f_{\text{mono}}}{f_t} t \quad \text{avec} \quad t = \frac{p_1}{p_2}$$

(*) le terme d'enveloppe est, ici, employé à tort.

V -13. Paramètres étudiés.

Nous avons tracé les convexes correspondant aux critères ci-après :

a) critères exprimés en contraintes

- critère de RANKINE,
- critère de TRESCA.

b) critères exprimés en déformations

- critère de BRANDENBERGER,
- critère de distorsion maximale.

Nous avons considéré à nouveau les caractéristiques des modèles étudiés au chapitre III, tant pour la nature des singularités que pour la condition de liaison entre la singularité et la matrice.

V -2. RESULTATS.

Ils sont résumés sur les courbes adimensionnelles des figures V-1 à V-4 sur lesquelles sont représentés simultanément les convexes relatifs aux diverses natures de singularités et aux deux conditions de liaison.

V -21. Influence de la nature de la singularité.

(Critère d'extension maximale).

A mesure que le module d'élasticité de la singularité décroît, le convexe se déforme, dans la zone de compression biaxiale, vers les (p_1, p_2) croissants.

Dans la zone de traction, son allure n'est presque pas affectée par la nature de la singularité.

V -22. Influence de la condition de liaison.

Nous retrouvons la similitude de comportement entre le cas de l'inclusion non-adhérente et celui du trou libre, en traction biaxiale.

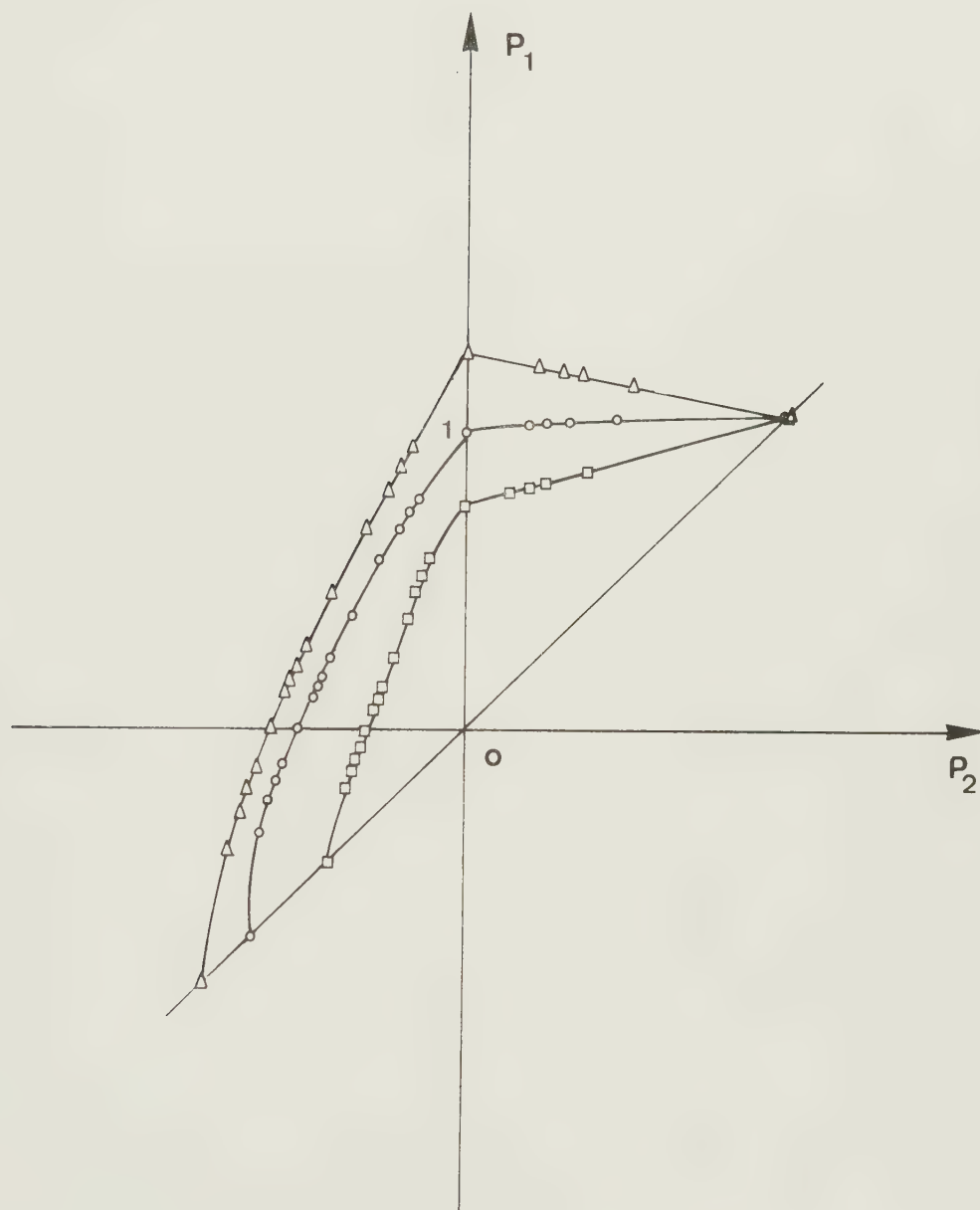
V -23. Influence de la nature du critère.

Dans le domaine de la compression biaxiale, nous pouvons remarquer que l'allure de la trace dans le plan (p_1, p_2) de la surface d'état limite est presque indépendante de la nature du critère, pour ceux que nous avons étudiés.

Cela nous permet de souligner l'importance que revêt l'étude des figures de microfissuration ou de plastification locale pour caractériser le comportement d'un matériau. L'analyse de la forme du convexe de réversibilité ne saurait être le seul facteur déterminant de cette étude.

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE CRITERE D'EXTENSION MAXIMALE

Singularité adhérente



- Δ $E_0 = 1000 \text{ daN/mm}^2$
- $\circ$ $E_0 \gg E$
- $\square$ $E_0 = 15 \text{ daN/mm}^2$

FIG. V-1 a)

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE
CRITERE D'EXTENSION MAXIMALE

Trou libre

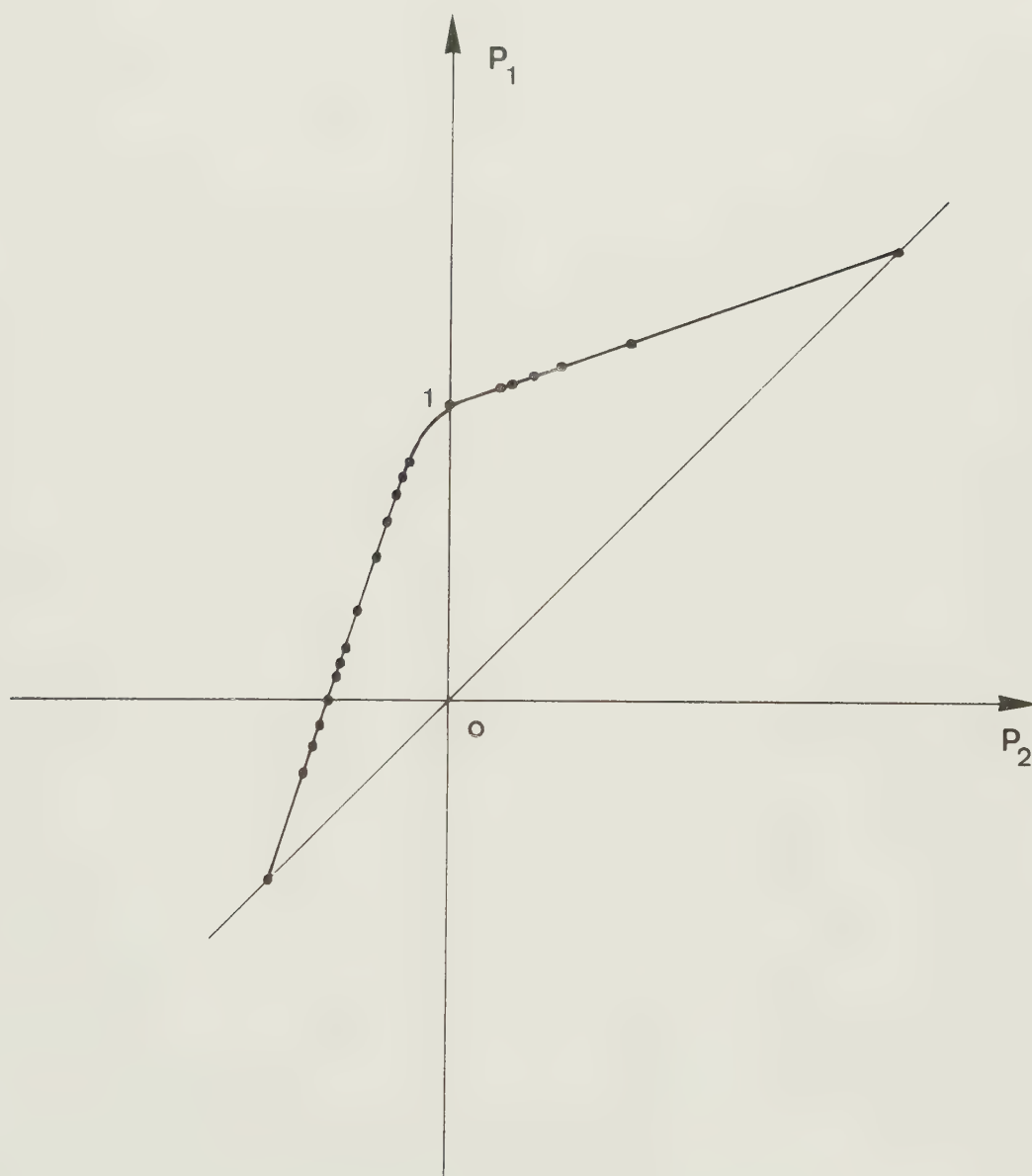


FIG. V-1 b)

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE
CRITERE D'EXTENSION MAXIMALE

Singularité rigide non-adhérente

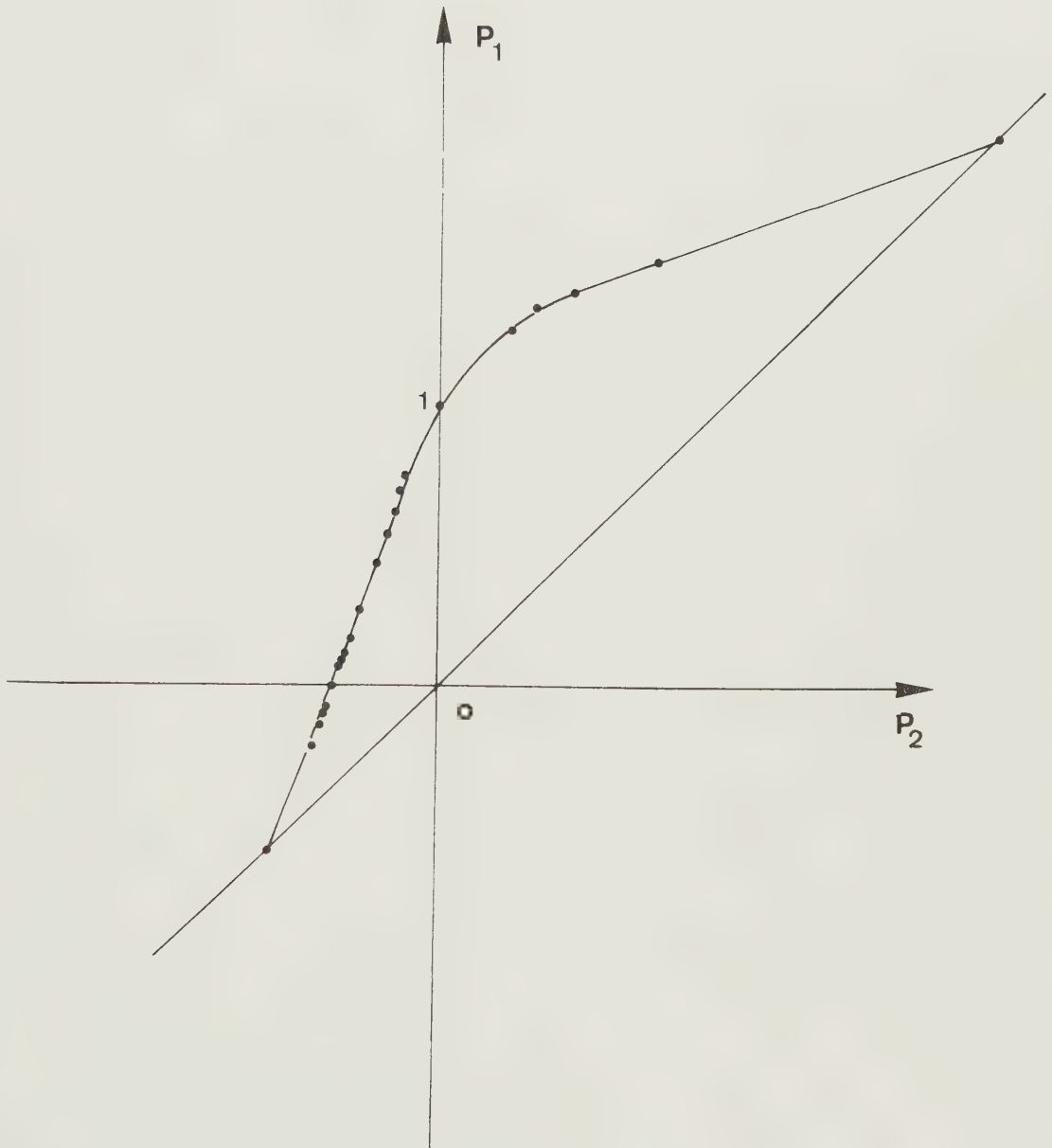


FIG. V -1 c)

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE
CRITERE DE DISTORSION MAXIMALE

Singularité rigide adhérente

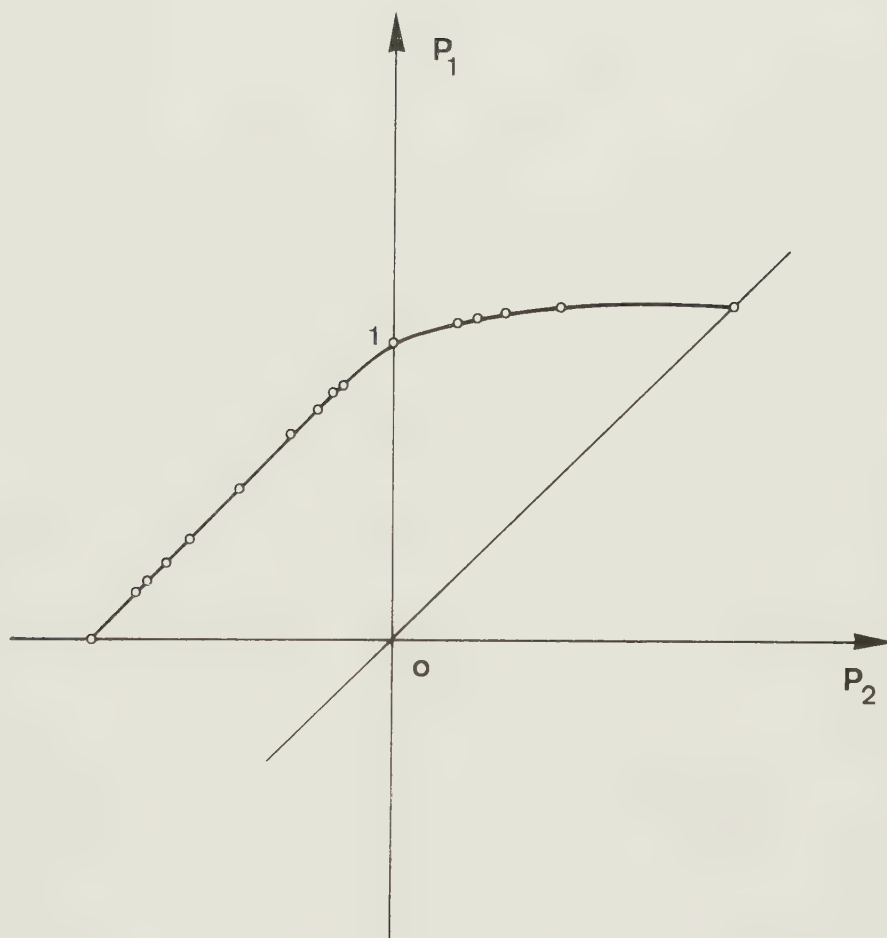
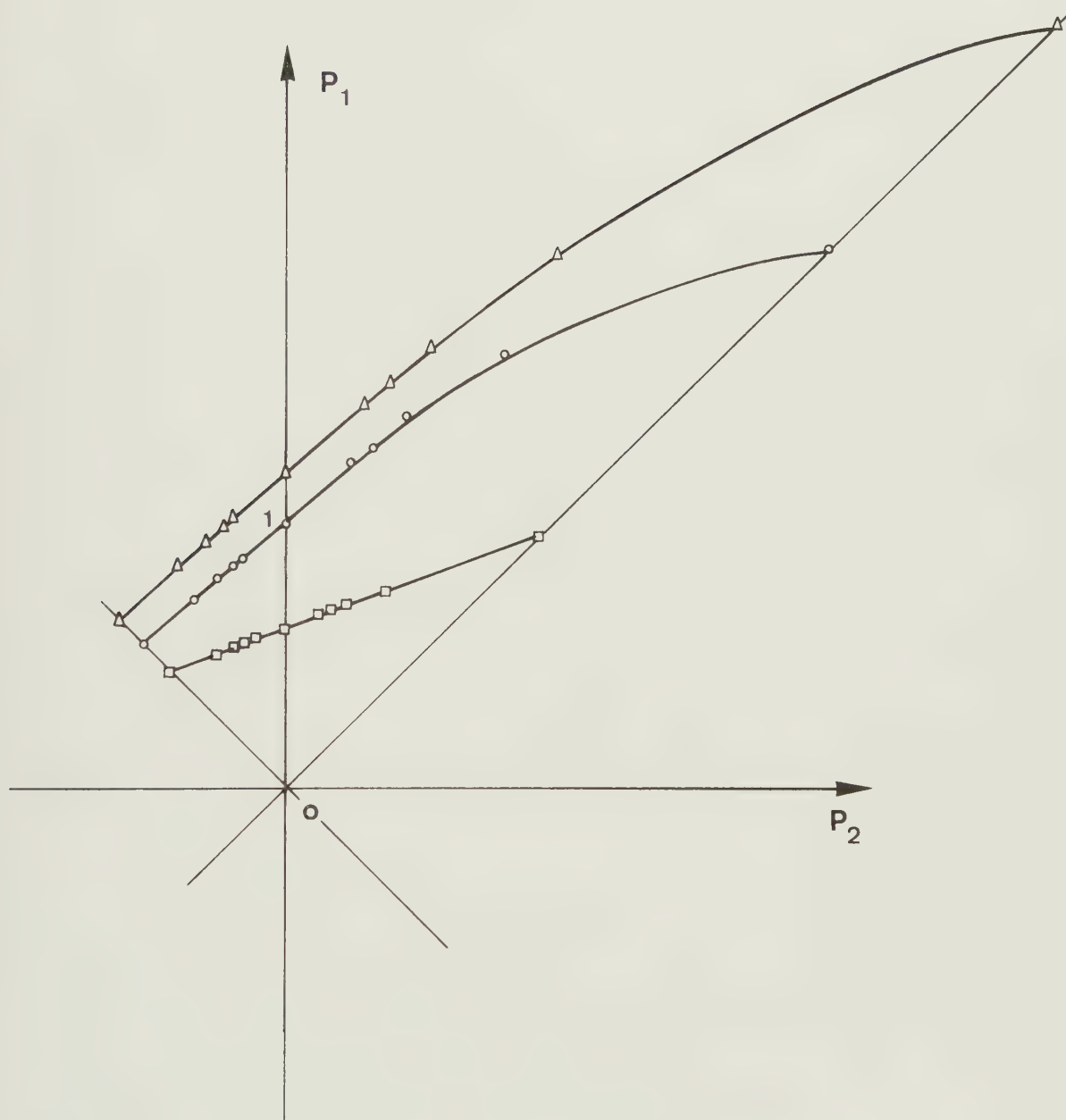


FIG. V - 2

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE CRITERE DE TRESCA

Singularité adhérente



- Δ $E_o = 1000 \text{ daN/mm}^2$
- $\circ$ $E_o \gg E$
- $\square$ $E_o = 15 \text{ daN/mm}^2$

FIG. V-3 a)

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE
CRITERE DE TRESCA

Trou libre

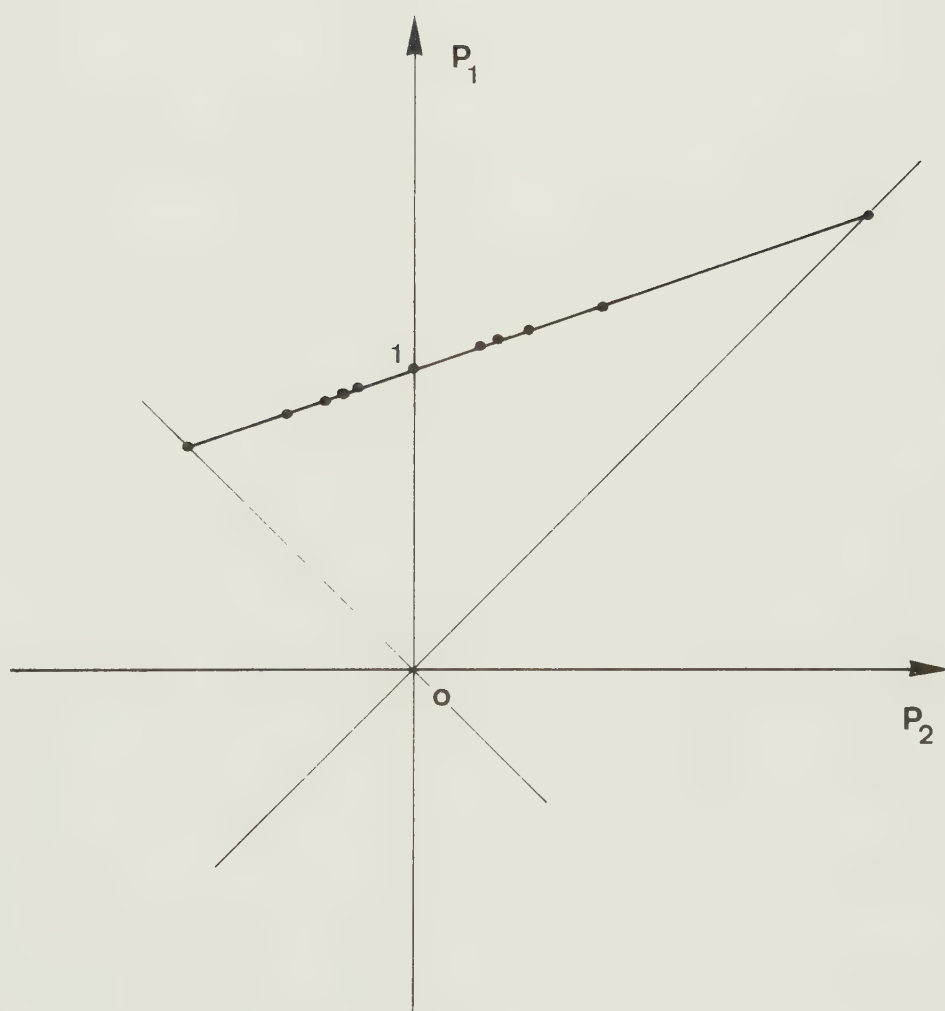


FIG. V - 3 b)

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE
CRITERE DE TRESCA

Singularité rigide non-adhérente

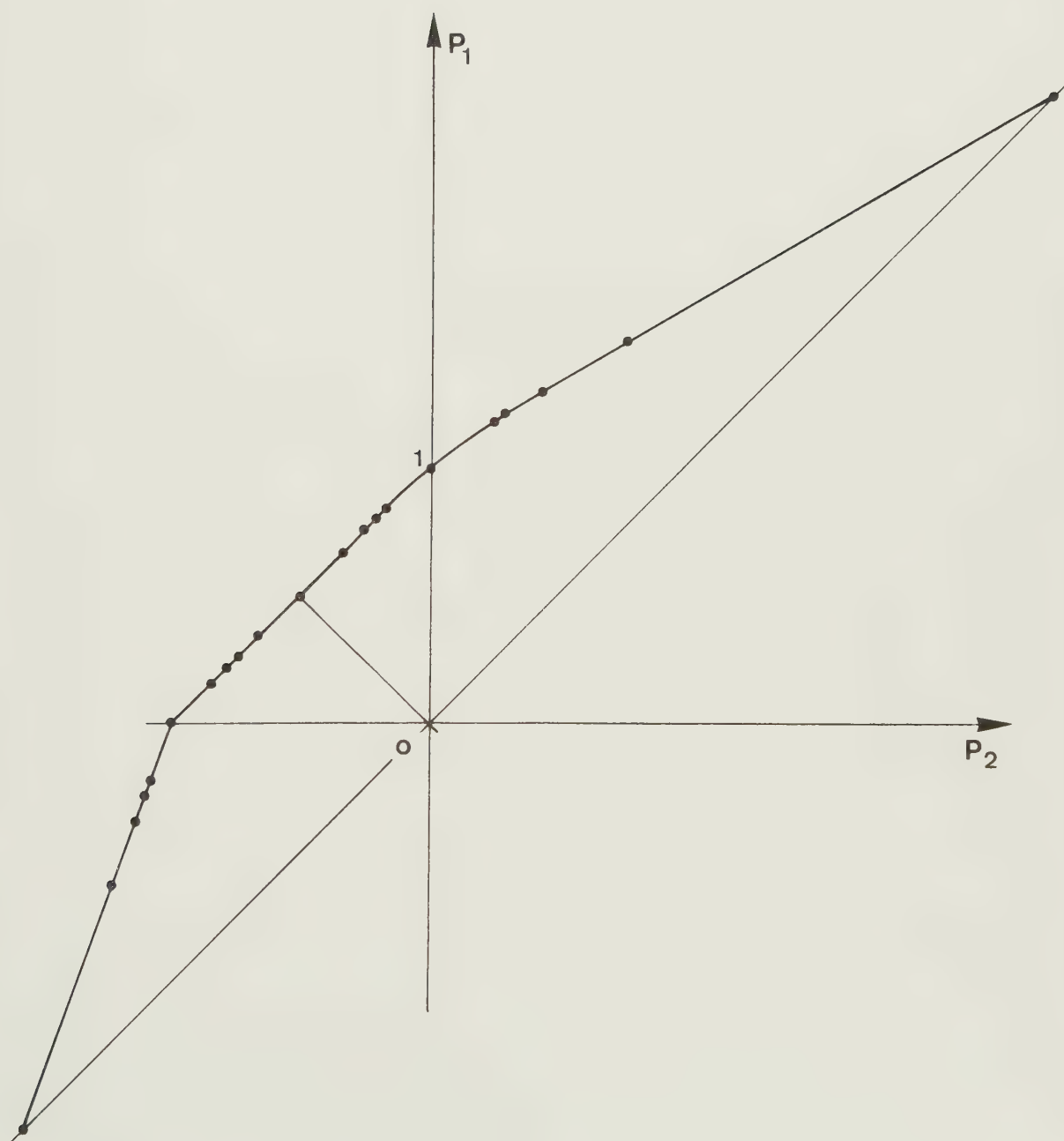
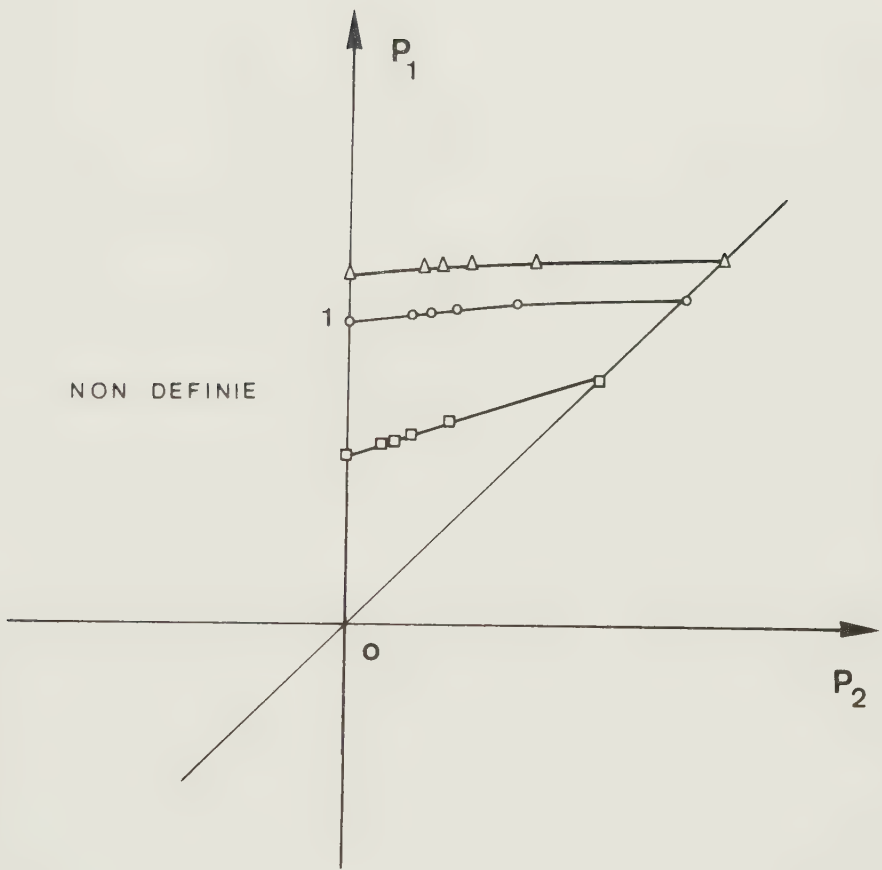


FIG. V - 3 c)

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE CRITERE DE RANKINE

Singularité adhérente



- $\triangle$ $E_o = 1\,000 \text{ daN/mm}^2$
- $\circ$ $E_o \gg E$
- $\square$ $E_o = 15 \text{ daN/mm}^2$

FIG. V-4 a)

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE
CRITERE DE RANKINE

Trou libre

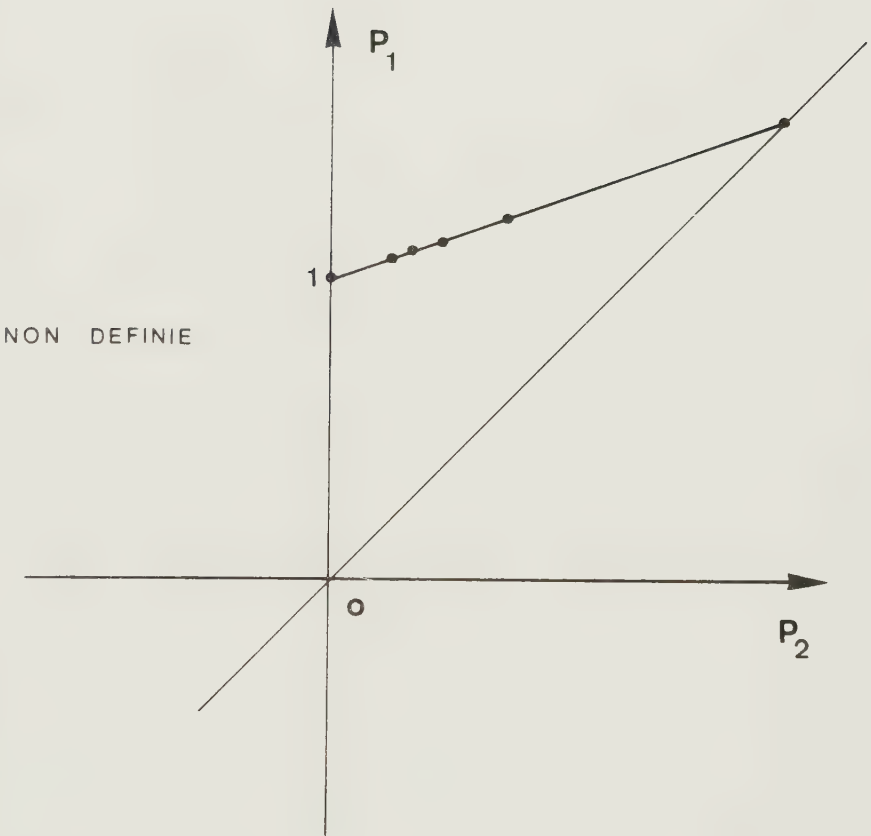


FIG. V - 4 b)

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE CRITERE DE RANKINE

Singularité rigide non-adhérente

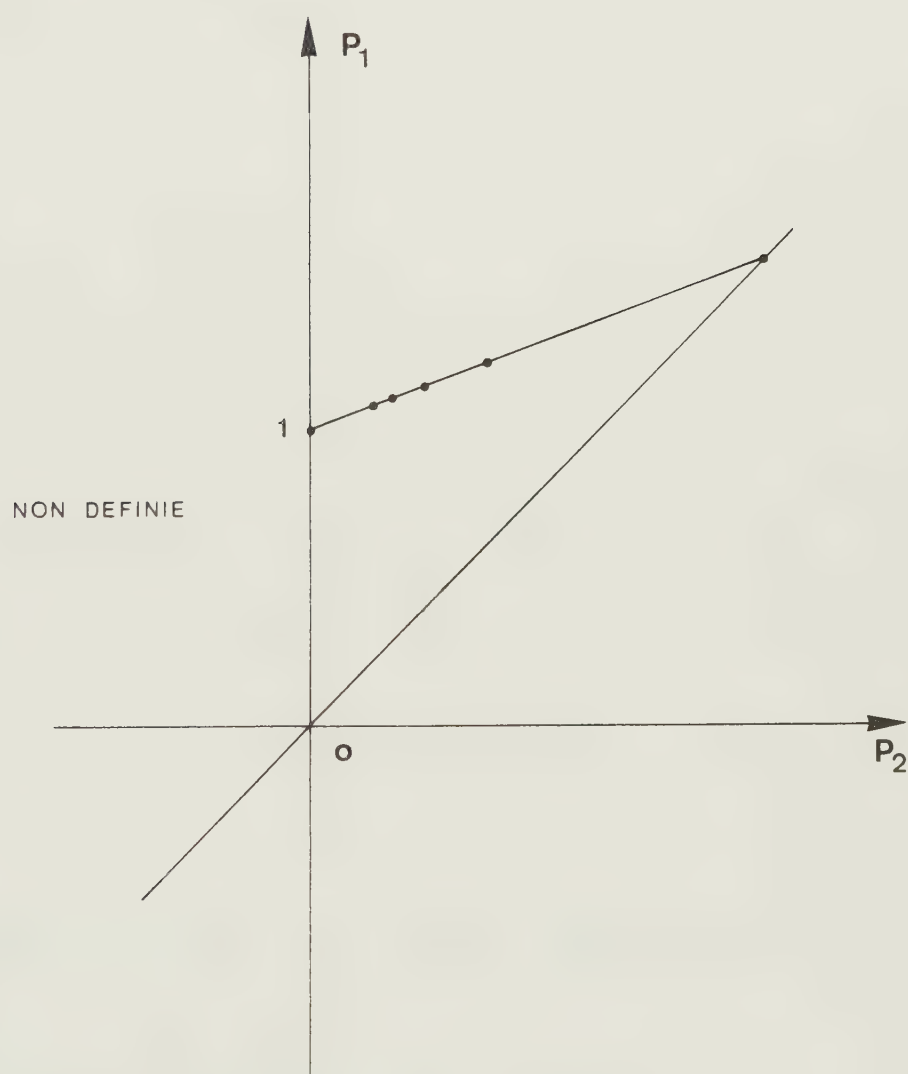


FIG. V - 4 c)

CHAPITRE VI

CAS PARTICULIER DES MORTIERS ET BETONS.

DEFINITION D'UN CRITERE DE REVERSIBILITE POUR LE MODELE THEORIQUE.

L'étude des lois de comportement mécanique des bétons, la détermination des critères de réversibilité et de rupture (17) auxquels ils obéissent, ont fait l'objet des travaux d'un grand nombre de chercheurs.

On a généralement tenté d'appliquer au béton, comme à certaines roches fragiles, la théorie de la courbe intrinsèque de CAQUOT (18). L'hypothèse de l'indépendance de la rupture vis à vis de la contrainte principale intermédiaire est le plus souvent traduite, dans la littérature anglo-saxonne (19), (20), (16), dans les termes de la loi de COULOMB dont la formulation originale :

$$\tau = C + \mu \sigma \quad (\mu \text{ frottement interne})$$

est parfois modifiée pour être plus conforme aux observations expérimentales.

Certains auteurs l'ont exprimée d'une manière plus générale, pour tenir compte de la concavité des courbes intrinsèques réelles :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = f (\sigma_1 + \sigma_3)$$

où f est une fonction dont le degré peut être supérieur à 1 (21).

D'autres, comme PAUL (22) et, à sa suite, VILE, ont proposé de combiner le critère de COULOMB à celui de RANKINE, en traction, pour expliquer la faible résistance des mortiers et bétons à la traction.

Cette théorie se trouve en partie confirmée par la similitude de comportement des mortiers et bétons et des fontes (19). Mais si elle permet de donner une interprétation satisfaisante, à l'exclusion de tout autre critère dès lors qu'on néglige le rôle de l'hétérogénéité du matériau, aux traces des surfaces d'état limite (Fig. VI-1, 2 et 3), elle n'apporte aucune explication à l'aspect des fissures observées lors d'essais en compression biaxiale (16), (19).

Lorsqu'on tient compte du caractère hétérogène des mortiers et bétons, on ne peut plus écarter systématiquement les critères qui font intervenir la contrainte principale intermédiaire.

Aussi nous a-t-il paru indispensable d'entreprendre, à partir des solutions théoriques établies dans la première partie, l'étude du comportement du modèle élémentaire de béton à la limite du domaine réversible, suivant la méthode générale définie au chapitre précédent.

Nous avons exprimé le critère de RANKINE en traction, pour tenir compte de la faible résistance des mortiers et bétons vis à vis de ce type de sollicitation.

Nous avons comparé nos conclusions aux travaux de BUYUKOZTURK, NILSON, SLATE (16) dans le cas de la compression biaxiale tant pour l'allure du convexe limite de réversibilité que pour celle des figures de microfissuration.

Dans le cas de la compression monoaxiale, les observations de CALVET (3), relatives au comportement d'un modèle de béton à singularité unique et matrice de pâte pure de ciment ou de mortier, ont été le support expérimental de notre argumentation.

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE
SELON VILE

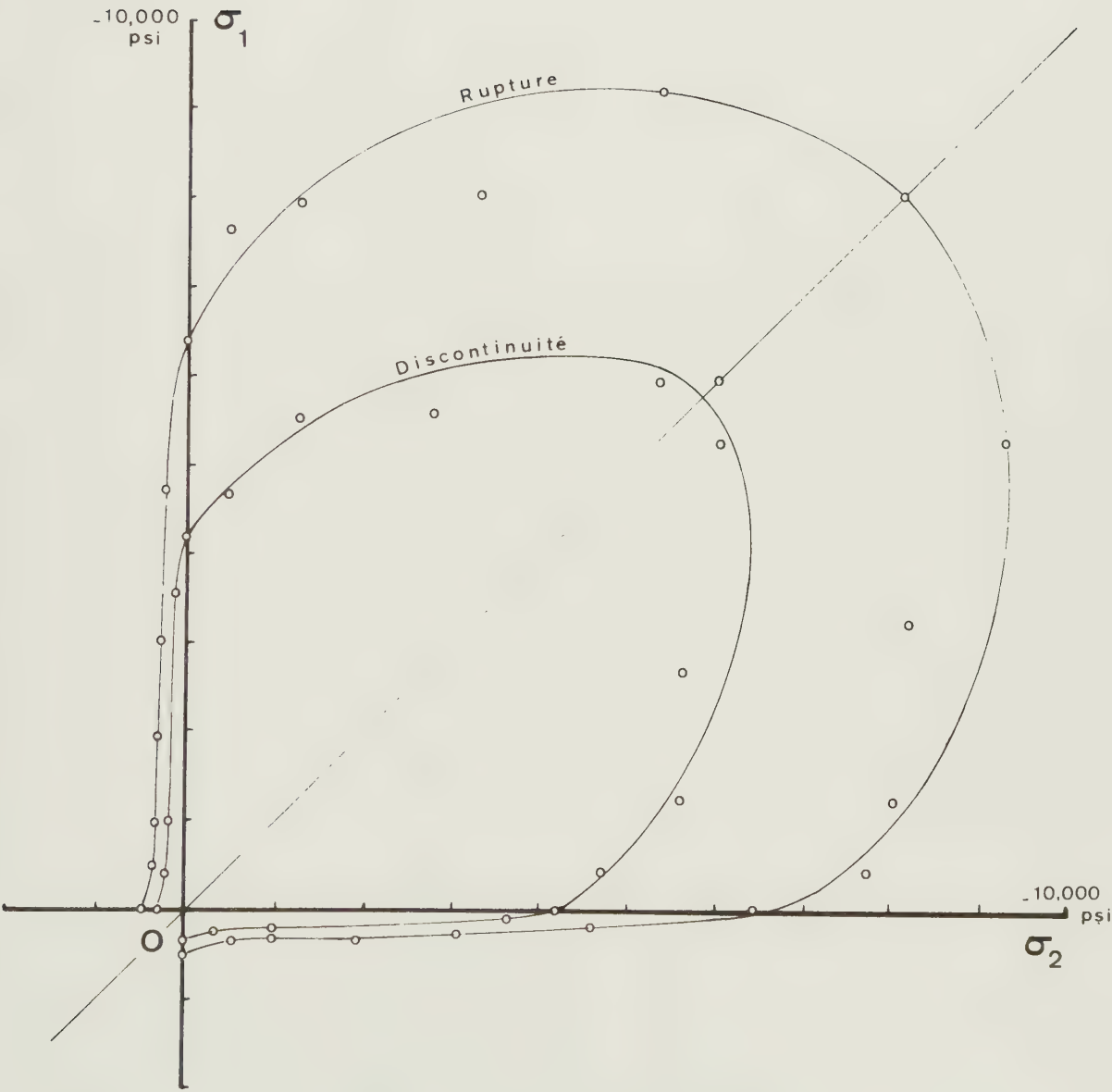


FIG. VI-1

TRACE IDEALISEE DE LA SURFACE
D'ETAT LIMITE SELON VILE

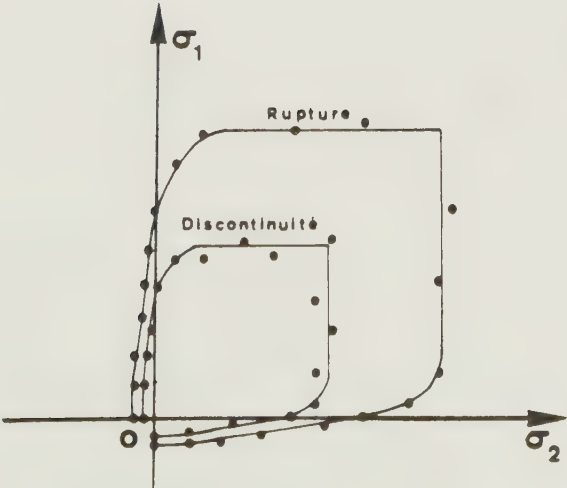
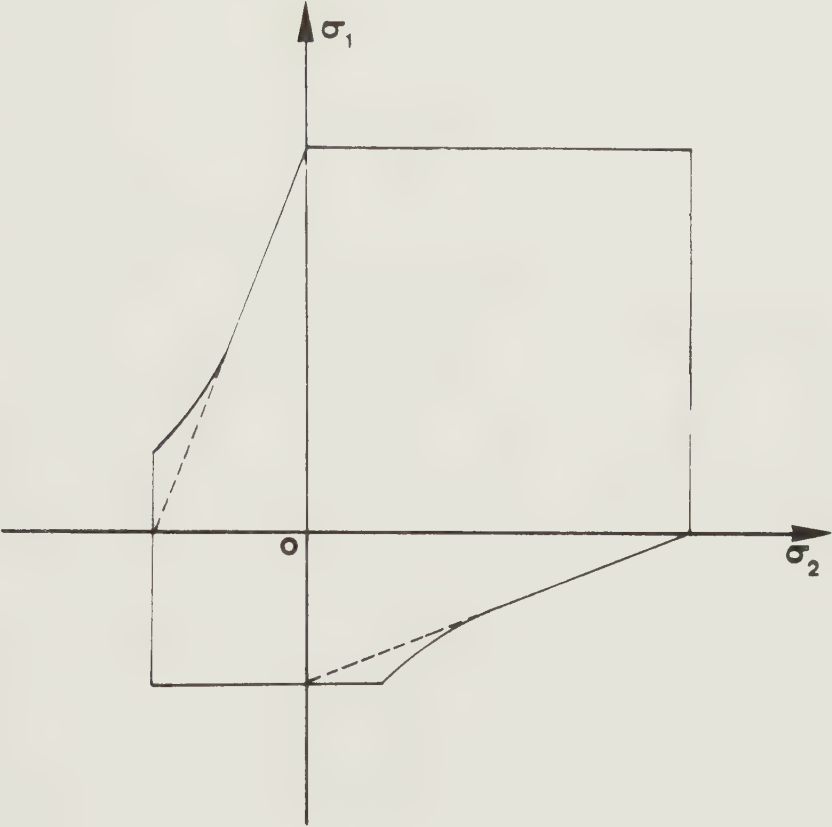
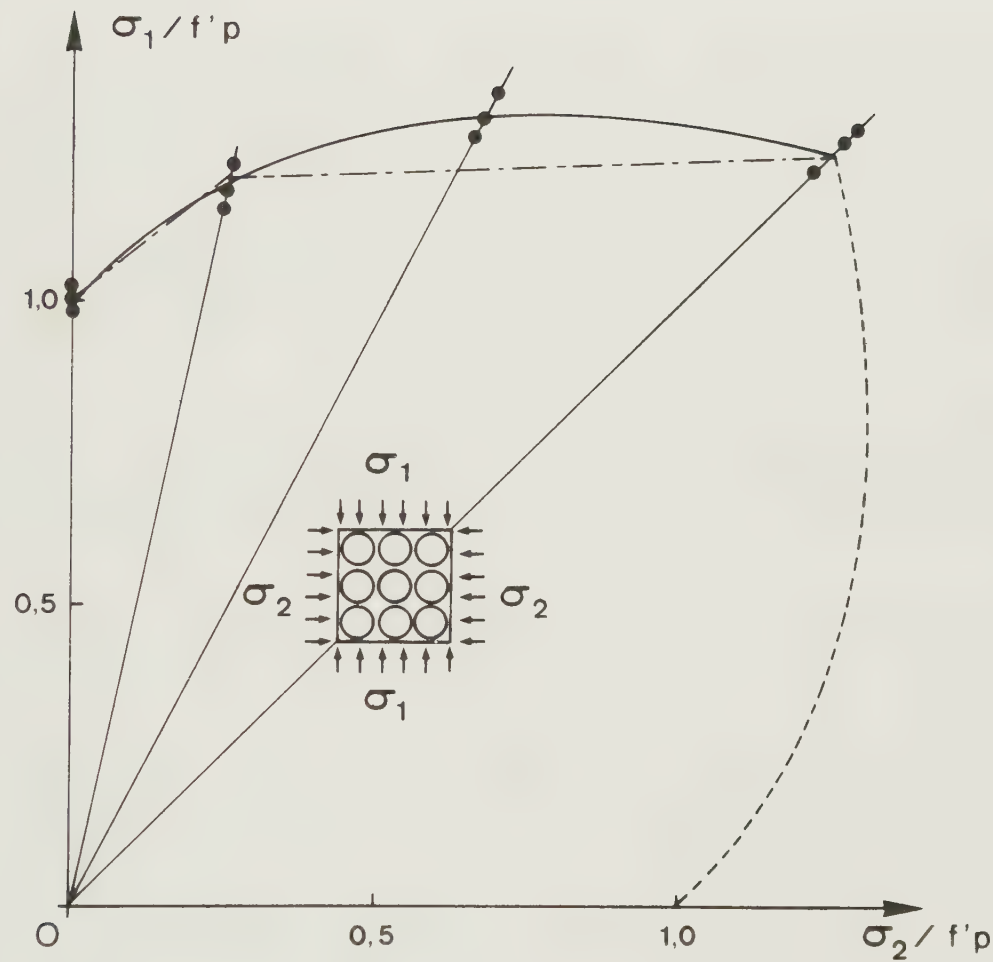


FIG.VI- 2

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE
SELON BUYUKOZTURK, NILSON ET SLATE



$f'p$ résistance en compression monoaxiale
- - - courbe théorique
— courbe expérimentale

FIG.VI-3

VI -1. ALLURE DU CONVEXE LIMITE DE REVERSIBILITE.

Dans le cas du béton, nous avons choisi pour la matrice $\nu = 0,2$ et $E = 2000 \text{ daN/mm}^2$. Nous avons étudié le cas de la singularité adhérente rigide pour comparer nos courbes à celles obtenues sur un modèle analogue, mais avec six singularités, par application de la méthode des éléments finis et dans l'hypothèse de la théorie de COULOMB-MOHR. Nous disposons également de l'allure expérimentale du convexe limite de réversibilité de ce modèle en compression biaxiale (16).

Pour connaître avec précision la trace de la surface d'état limite dans le plan (p_1, p_2) dans le cas d'une singularité unique, nous avons mené des essais sur un modèle réel, à matrice de pâte de ciment ou de mortier, lorsque la singularité est un trou libre ou un granulat rigide non-adhérent ou bien encore un granulat rigide adhérent. Dans ce dernier cas, nous avons pu constater la similitude des traces dans le plan (p_1, p_2) de la surface d'état limite que nous avons obtenues avec celles de BUYUKOZTURK, NILSON, et SLATE (16). Dans le cas du trou libre, nous avons constaté une forte déformation du convexe dans le sens des (p_1, p_2) croissants.

Nous avons pu examiner, parmi les hypothèses de critère étudiées, le cas de la théorie de COULOMB-MOHR modifiée par PAUL et VILE, en combinant les critères de RANKINE dans les quadrants de traction et de cisaillement maximal dans le premier quadrant du plan R^2 global (compression biaxiale).

Il convient cependant de remarquer qu'une telle combinaison s'exprime par une relation du type :

$$\alpha\tau + \beta\sigma = K$$

qui traduirait bien une loi de COULOMB si les coefficients α et β ne dépendaient pas de la nature de la sollicitation appliquée. Or, c'est le cas puisque :

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (0,1) & \text{si} & & p_1 \cdot p_2 < 0 \\ (\alpha, \beta) &= (1,0) & \text{si} & & p_1 \text{ et } p_2 > 0 \end{aligned}$$

On peut envisager des combinaisons plus complexes, mais toutes présenteront cet aspect non biunivoque, ce qui semble s'opposer à la notion physique d'unicité du critère de comportement d'un matériau.

Nous n'avons étudié ce cas que pour que notre analyse soit la plus complète possible, et parce que c'est le critère presque-universellement adopté.

Les tableaux ci-après regroupent les valeurs maximales des fonctions critères étudiées lorsque p_1 et p_2 varient respectivement, par valeurs entières, entre $\{-5,+5\}$ et $\{-1,+1\}$.

Nous avons représenté sur les figures VI-4 à VI-6 les convexes correspondants.

VI -12. Conclusions.

Nous pouvons constater que le critère de la contrainte de traction maximale ne peut convenir puisque, dans le cas de la compression biaxiale et pour un rapport p_1/p_2 inférieur à 4, toutes les contraintes sont des compressions.

Les critères de cisaillement maximal et de distorsion maximale ne peuvent pas être retenus puisque le convexe qui leur est associé est symétrique par rapport aux bissectrices du référentiel. Ceci reviendrait à admettre que les mortiers et bétons ont un comportement physique symétrique en traction et en compression.

Le critère d'extension maximale, de même que le critère proposé par VILE (théorie de COULOMB-MOHR modifiée) conduisent à des convexes tout à fait semblables à ceux que l'on observe expérimentalement (Fig. VI-3) (16).

Il convient de remarquer la similitude des courbes ainsi obtenues, relatives à un modèle très élémentaire, aux résultats des travaux menés sur le matériau réel tant par VILE que par tous les chercheurs qui ont étudié le comportement des bétons sous l'effet de sollicitations pluriaxiales (17), (23), (24).

En ce qui concerne les résultats des travaux de BASCOUL (24) et de LINSE et STEGBAUER (23), il convient de souligner que le soin apporté par ces chercheurs à l'application des efforts biaxiaux (25) (26), nous permettra de confronter les résultats de notre théorie à ceux de leurs recherches expérimentales en respectant toutes les hypothèses de nos calculs théoriques.

p_1	p_2	$E\varepsilon \text{ max}$	Nature	locali- sation	$E \gamma \text{ max}$	Nature	locali- sation
1	1	- 0,40	ε_z	$\forall \theta$	1,89	γ_{xz}	$\forall \theta$
2	1	- 0,75	ε_z	0°	3,65	γ_{xz}	0°
3	1	- 1,10	ε_z	0°	5,42	γ_{xz}	0°
4	1	- 1,44	ε_z	0°	7,18	γ_{xz}	0°
5	1	- 1,79	ε_z	0°	8,94	γ_{xz}	0°
- 1	- 1	- 1,49	ε_x	$\forall \theta$	1,89	γ_{xz}	$\forall \theta$
- 2	- 1	- 2,91	ε_x	0°	3,65	γ_{xz}	0°
- 3	- 1	- 4,32	ε_x	0°	5,42	γ_{xz}	0°
- 4	- 1	- 5,74	ε_x	10°	7,18	γ_{xz}	0°
- 5	- 1	- 7,17	ε_x	15°	8,94	γ_{xz}	0°
1	- 1	- 1,76	ε_y	60°	3,28	γ_{xy}	45°
2	- 1	- 2,18	ε_y	60°	4,96	γ_{xy}	45°
3	- 1	- 2,68	ε_y	55°	6,73	γ_{xy}	45°
4	- 1	- 3,17	ε_y	55°	8,52	γ_{xy}	45°
5	- 1	- 3,66	ε_y	55°	13,31	γ_{xy}	45°
- 1	1	- 1,76	ε_y	30°	3,28	γ_{xy}	45°
- 2	1	- 3,16	ε_y	30°	4,96	γ_{xy}	45°
- 3	1	- 3,57	ε_y	30°	6,73	γ_{xy}	45°
- 4	1	- 6,01	ε_y	25°	8,52	γ_{xy}	45°
- 5	1	- 7,45	ε_y	25°	13,31	γ_{xy}	45°
1	0	- 0,50	ε_y	50°	1,81	γ_{xy}	40°
- 1	0	- 1,45	ε_x	20°	1,81	γ_{xy}	40°

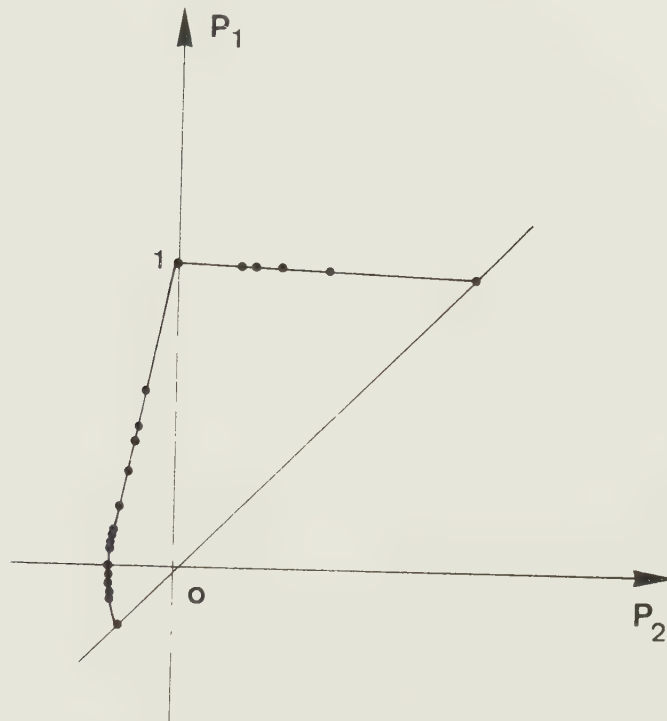
Tableau VI-1 - Critères en déformations.

p_1	p_2	$\sigma_{\max.}$ (traction)	Nature	locali- sation	$ \tau_{\max} $	Nature	locali- sation
1	1	/	/	/	1,57	τ_{xy}	$\forall \theta$
2	1	/	/	/	3,04	τ_{xy}	0°
3	1	/	/	/	4,51	τ_{xy}	0°
4	1	- 0,10	σ_2	55°	5,98	τ_{xy}	0°
5	1	- 0,37	σ_2	55°	7,45	τ_{xy}	0°
- 1	- 1	- 1,57	σ_1	$\forall \theta$	1,57	τ_{xy}	$\forall \theta$
- 2	- 1	- 3,04	σ_1	0°	3,04	τ_{xy}	0°
- 3	- 1	- 4,51	σ_1	0°	4,51	τ_{xy}	0°
- 4	- 1	- 5,98	σ_1	0°	5,98	τ_{xy}	0°
- 5	- 1	- 7,45	σ_1	0°	7,45	τ_{xy}	0°
1	- 1	- 1,59	σ_2	60°	2,73	τ_{xy}	45°
2	- 1	- 1,83	σ_2	60°	4,14	τ_{xy}	45°
3	- 1	- 2,10	σ_2	60°	5,61	τ_{xy}	40°
4	- 1	- 2,37	σ_2	60°	7,10	τ_{xy}	40°
5	- 1	- 2,65	σ_2	60°	8,59	τ_{xy}	40°
- 1	1	- 1,59	σ_2	25°	2,73	τ_{xy}	45°
- 2	1	- 3,01	σ_2	25°	4,14	τ_{xy}	45°
- 3	1	- 4,46	σ_2	20°	5,61	τ_{xy}	50°
- 4	1	- 5,92	σ_2	20°	7,10	τ_{xy}	50°
- 5	1	- 7,38	σ_2	20°	8,59	τ_{xy}	50°
1	0	- 0,29	σ_2	55°	1,51	τ_{xy}	40°
- 1	0	- 1,47	σ_1	10°	1,51	τ_{xy}	50°

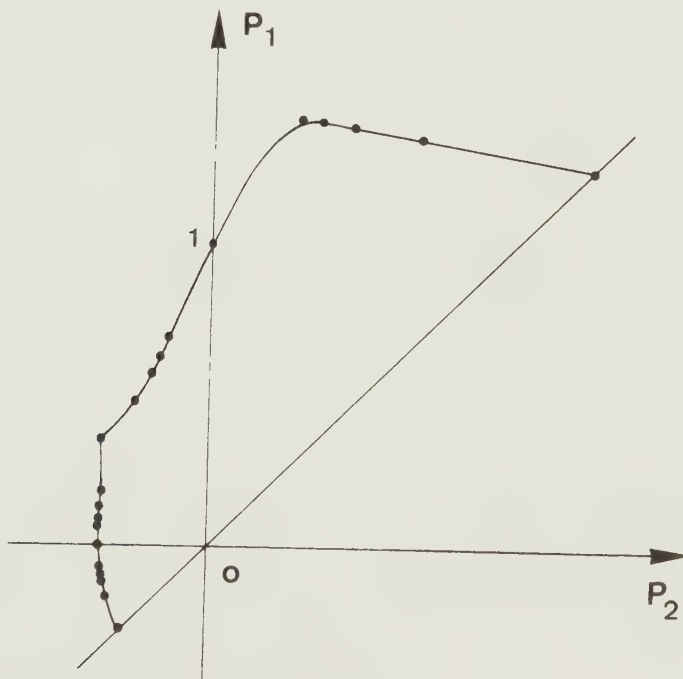
Tableau VI-2 - Critères en contraintes.

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE

Granulat adhérent



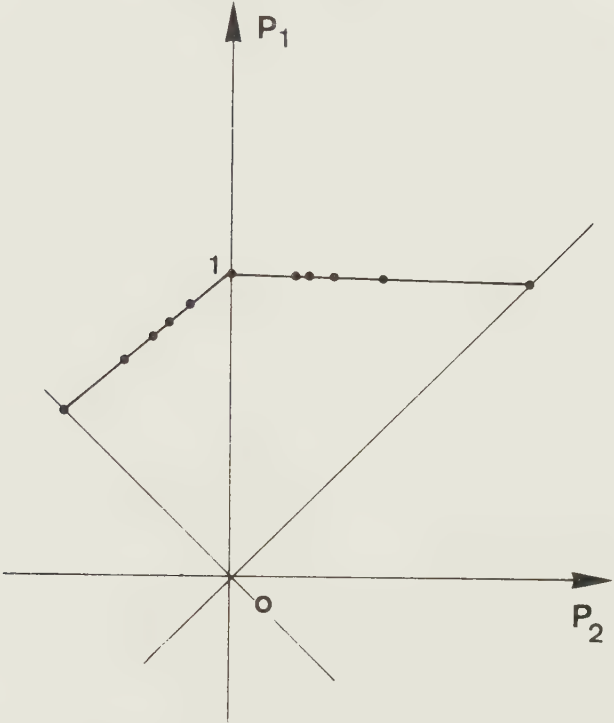
a) Théorie de COULOMB-MOHR



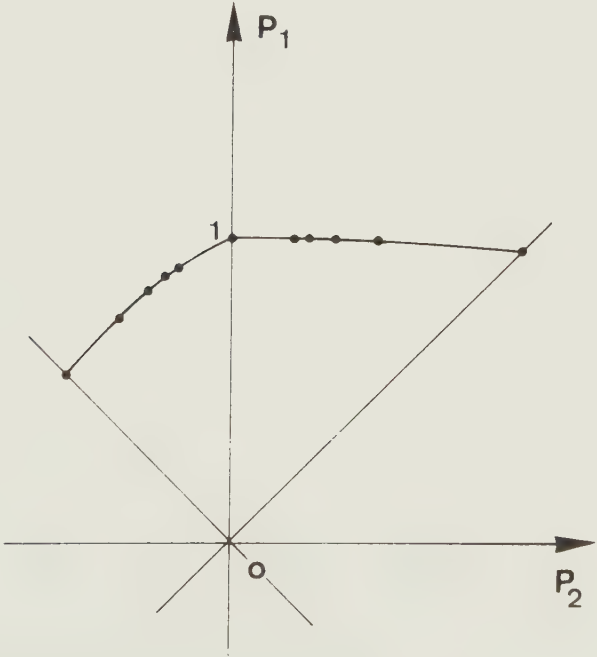
b) Critère de BRANDENBERGER

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE

Granulat adhérent



a) Critère de TRESCA



b) Critère de distorsion maximale

FIG. VI-5

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE
CRITERE DE **RANKINE** EN TRACTION

Granulat adhérent

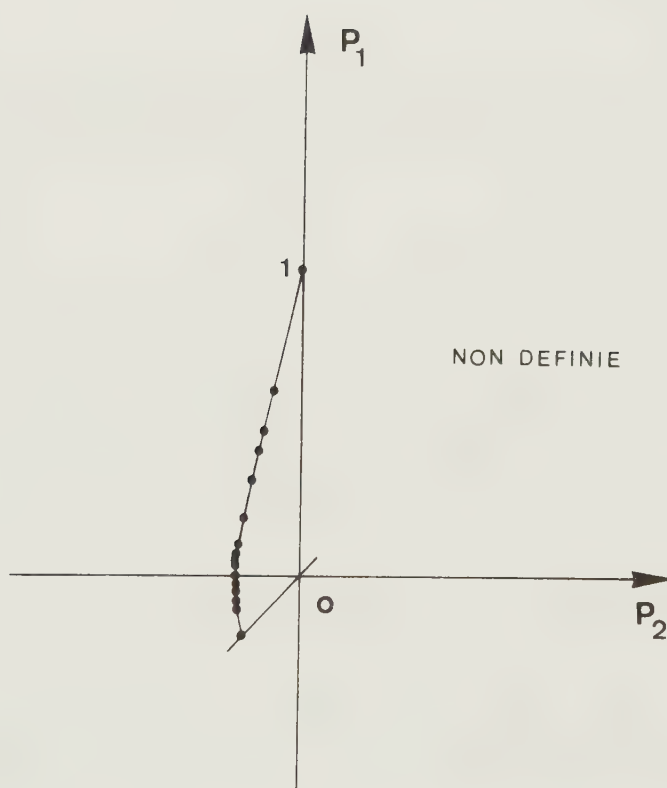


FIG. VI-6

VI -2. ALLURE DES FIGURES DE FISSURATION.

La détermination des points où la fonction critère passe par un maximum absolu nous permet de localiser les points origines des microfissures.

L'orientation initiale de ces dernières dépend de celle du repère principal des contraintes à leur origine.

Si l'étude des modèles théoriques nous permet de déterminer aisément ces éléments, il nous est cependant impossible d'étudier la propagation de la fissuration, puis la rupture, avec autant de rigueur.

En effet, l'équilibre mécanique du modèle est bouleversé dès l'ouverture des microfissures. Il se produit alors, au voisinage de ces dernières, une redistribution des contraintes et des déformations locales.

VI -21. Cas de la compression monoaxiale.

Nous avons étudié trois cas, selon que la singularité est un trou libre, un granulat rigide non-adhérent ou adhérent, reprenant ainsi les paramètres des travaux de CALVET sur le comportement mécanique de modèles à matrice de pâte de ciment ou de mortier (3).

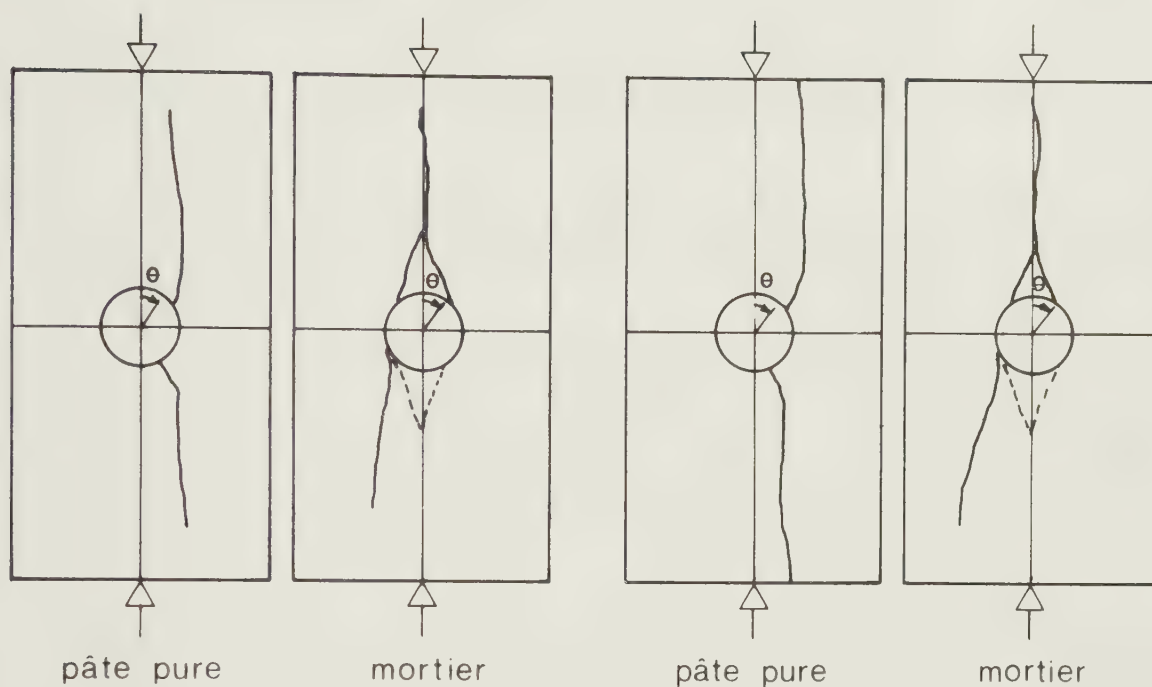
VI -211. Cas du granulat rigide adhérent.

Les figures ci-après représentent l'aspect du modèle de CALVET sous faible charge, lors de la microfissuration, puis sous charge élevée, lors de la rupture.

PREMIERE

FISSURE

RUPTURE



Le tableau ci-après regroupe, au contour de la singularité, les valeurs théoriques des fonctions critères étudiées. Celles encadrées sont les maxima absolus sur le contour. C'est en ces points que doivent apparaître les premières microfissures dans chaque hypothèse de critère.

θ°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$E\varepsilon$	-0,35	-0,33	-0,31	-0,34	-0,45	-0,50	-0,47	-0,35	-0,15	-0,05
$E\gamma$	1,76	1,77	1,76	1,78	1,81	1,70	1,45	1,06	0,56	0,20
$\sigma_{Tr.}$	/	/	/	-0,06	-0,19	-0,27	-0,29	-0,22	-0,07	/
τ_{max}	1,21	1,26	1,38	1,48	1,51	1,42	1,21	0,88	0,47	0,06

Tableau VI-3 - Cas du granulat adhérent rigide.

On peut constater, d'après ce tableau, que toutes les fonctions critères sont maximales dans un même intervalle ($40^\circ < \theta < 60^\circ$).

C'est également dans ce voisinage que s'ouvre la première microfissure, ainsi que nous pouvons l'observer sur les figures de fissuration de CALVET.

La propagation de la fissuration se développe ensuite différemment dans les deux matrices, en fonction de la nature particulière de chaque matériau.

Les figures de fissuration que l'on observe ainsi, dans le cas particulier d'un modèle très élémentaire, sont analogues à celles que l'on peut observer dans les bétons (1), (19), (20). On peut remarquer, en effet, la présence de cônes de mortier relativement importants et adhérents, après rupture complète du matériau, aux granulats sur une calotte polaire orientée dans la direction de la sollicitation de compression ($-50^\circ < \theta < 50^\circ$).

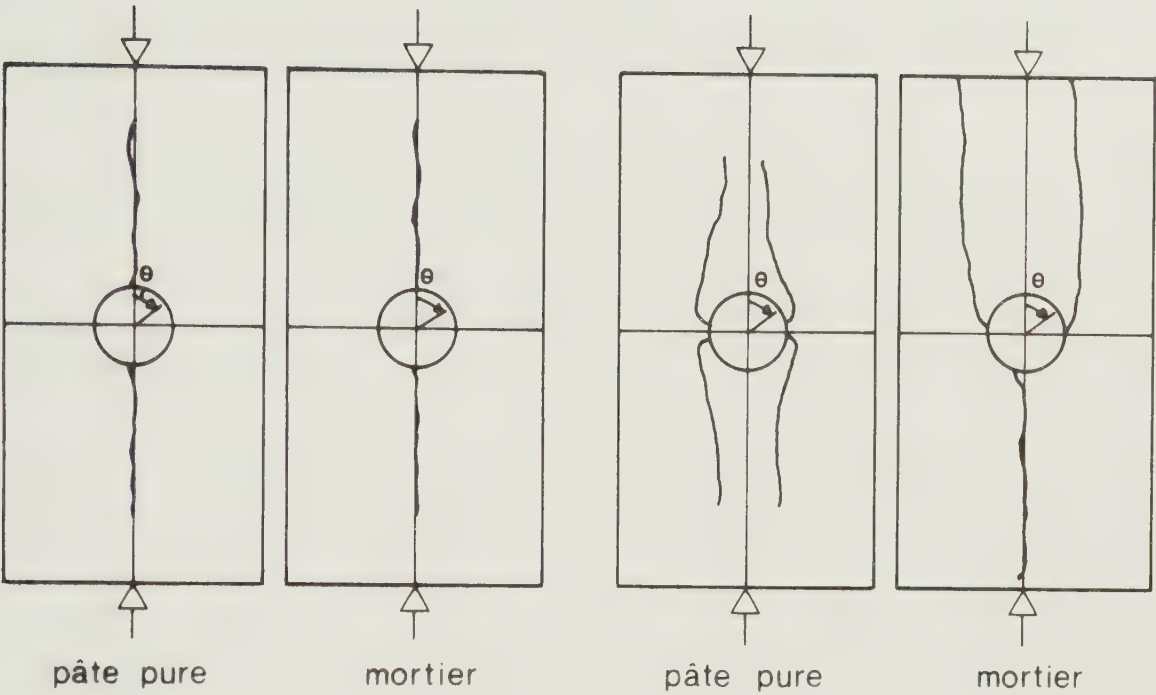
Tous les critères étudiés permettent d'apporter une explication satisfaisante au comportement du modèle de CALVET dans le cas du granulat rigide adhérent. Nous allons pousser notre analyse plus avant en examinant le cas du trou libre et celui du granulat rigide non-adhérent

VI -212. Cas du trou libre.

Les figures ci-après représentent l'aspect du modèle de CALVET sous faible charge, lors de la microfissuration, puis sous charge élevée, lors de la rupture.

PREMIERE FISSURE

RUPTURE



Le tableau ci-après regroupe les valeurs théoriques des fonctions critères étudiées au contour du trou libre. Celles encadrées sont les maxima absolus.

θ°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$E\varepsilon$	-1,0	-0,88	-0,53	0	-0,13	-0,27	-0,40	-0,51	-0,58	-0,60
$E\gamma$	1,2	1,1	0,64	0	0,78	1,60	2,40	3,04	3,46	3,60
$\sigma_{Tr.}$	-1,0	-0,88	-0,53	0	/	/	/	/	/	/
τ_{max}	1,0	0,88	0,53	0	0,65	1,35	2,0	2,53	2,88	3,0

Tableau VI-4 - Cas du trou libre.

On peut remarquer, d'après les valeurs contenues dans le tableau VI-4 que les premières microfissures dues à l'extension maximale ou à la contrainte de traction maximale doivent se produire sur l'axe de symétrie du modèle parallèle à la direction de chargement ($\theta = 0^\circ$).

Les premières microfissures dues au cisaillement maximal ou à la distorsion maximale doivent se manifester sur l'axe de symétrie perpendiculaire à la direction de chargement ($\theta = 90^\circ$).

Or, ainsi que nous pouvons le constater sur les figures précédentes, la seule microfissure qui apparaît à faible charge est dirigée suivant l'axe $\theta = 0^\circ$.

Il en résulte que nous pouvons éliminer les critères de cisaillement maximal et de distorsion maximale qui ne peuvent expliquer l'allure de la fissuration obtenue expérimentalement.

Par contre, le critère d'extension maximale, ainsi que le critère de RANKINE en traction, conduisent à une figure de première fissuration qui s'accorde bien avec les observations de CALVET. Il en est de même de la théorie de COULOMB-MOHR modifiée qui se ramène, dans le cas de la sollicitation de compression monoaxiale, au critère de RANKINE en traction.

A la rupture, sous charge élevée, après l'ouverture de la microfissure à $\theta = 0^\circ$, il est logique de trouver les figures observées par CALVET puisqu'alors le modèle se comporte comme deux demi-prismes encochés sur un des bords non chargés, l'échancrure étant un demi-cercle.

La déformation d'extension maximale et la contrainte de traction maximale se produisent au creux de l'encoche ($\theta \simeq 90^\circ$) où apparaissent, ainsi que l'a observé CALVET, les fissures à charge élevée.

VI -213. Cas du granulat rigide non-adhérent.

Nous retrouvons la similitude des comportements des modèles à granulat non-adhérent et de ceux des modèles percés de trous libres (tableau VI-5).

Nos conclusions seront les mêmes qu'au paragraphe précédent en ce qui concerne les premiers désordres irréversibles.

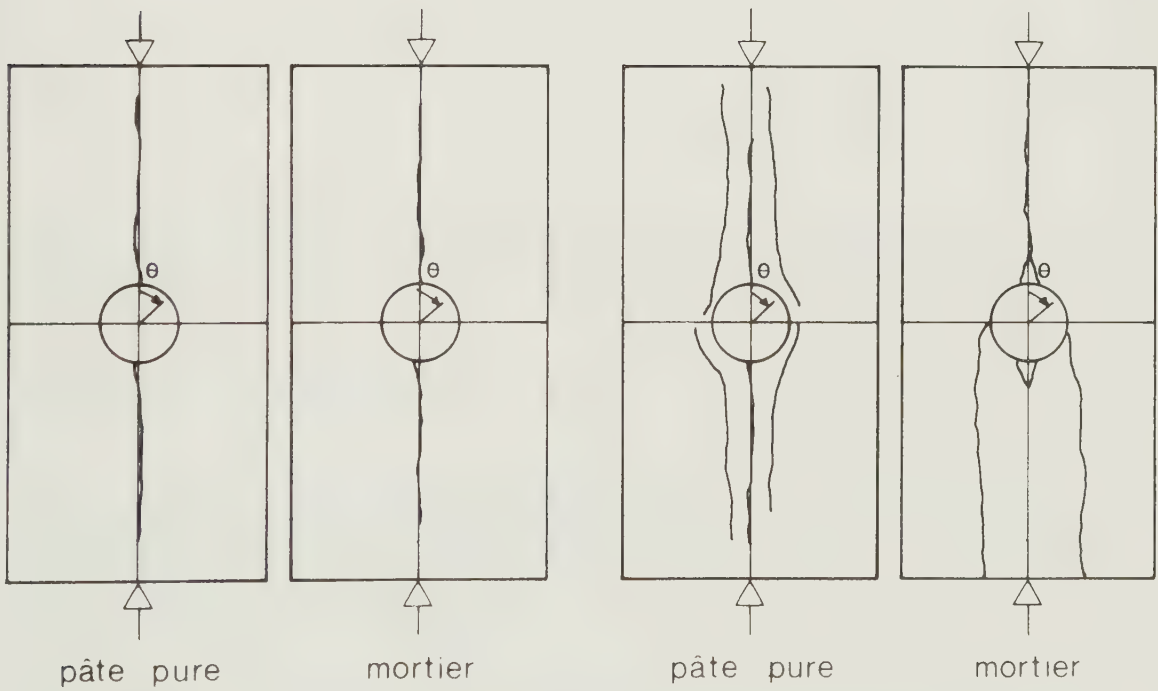
A la rupture, nous pouvons observer, par contre, que la présence d'un arc de contact à l'interface modifie l'allure des fissures qui tendent à suivre l'isostatique formée par l'arc décollé.

θ°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$E\varepsilon$	-1,02	-0,97	-0,75	-0,23	-0,21	-0,18	-0,16	-0,28	-0,55	-0,28
$\sigma_{Tr.}$	-0,63	-0,59	-0,42	-0,22	/	/	/	/	/	/

Tableau VI-5 - Cas du granulat rigide non-adhérent.

PREMIERE FISSURE

RUPTURE



Il convient de remarquer également le rôle joué par la microstructure de la matrice dans la propagation des fissures à la rupture et, notamment, l'apparition de cônes de mortier adhérents à la singularité dans le cas de la matrice de mortier.

VI -214. Conclusions.

Il résulte de l'étude, sur le modèle de CALVET, des figures théoriques et expérimentales de première fissuration que seuls les critères d'extension maximale, de contrainte de traction maximale et la théorie de COULOMB-MOHR modifiée (19), (20) peuvent expliquer le comportement du modèle élémentaire de béton sous l'effet d'une sollicitation de compression monoaxiale.

Comme, par ailleurs, l'étude des traces théoriques et expérimentales dans le plan R^2 global des surfaces d'état limite réversible nous a permis de conclure que le critère de RANKINE en traction ne pouvait expliquer le comportement du modèle élémentaire de béton, nous pouvons restreindre la suite de notre analyse au critère d'extension maximale et à la théorie de COULOMB-MOHR modifiée.

VI -22. Cas de la compression biaxiale.

Les extensions maximales, ainsi que le montrent les résultats théoriques portés dans le tableau VI-1, sont perpendiculaires au plan (xoy) des sollicitations p_1 et p_2 appliquées au modèle.

Les microfissures qui en résultent s'ouvrent donc dans l'épaisseur de l'échantillon.

La théorie de COULOMB-MOHR modifiée se ramène, dans le cas de la compression biaxiale, au critère de cisaillement maximal. Les microfissures qui en sont la conséquence sont, ainsi que le montrent les résultats théoriques du tableau VI-2, des clivages situés dans le plan médian de l'échantillon.

Or, tous les expérimentateurs (16), (19) ont observé l'apparition de microfissures d'extension dans l'épaisseur de l'échantillon et non pas de clivages. Nous avons pu également vérifier ces résultats sur le modèle de CALVET.

Nous devons donc rejeter la théorie de COULOMB-MOHR modifiée et conclure que seul le critère d'extension maximale peut expliquer le comportement du modèle élémentaire de béton sous l'effet de

sollicitations, monoaxiales ou biaxiales, de compression.

Pour étendre cette conclusion au plan R^2 des sollicitations extérieures p_1, p_2 , il nous reste à étudier le comportement du modèle élémentaire, dans la seule hypothèse du critère d'extension maximale, pour des sollicitations monoaxiales ou biaxiales de traction.

VI -23. Cas de la traction, lors de sollicitations monoaxiales ou biaxiales.

VI -231. Cas du granulat rigide adhérent.

Les auteurs qui ont étudié la nature des fissures qui apparaissent dans des pièces de béton sollicitées en traction, ont observé que la fissuration se produit brutalement, d'une part, et que, d'autre part, les surfaces de rupture correspondantes sont orthogonales à la direction de la sollicitation de traction.

Les surfaces de rupture suivent le contour des granulats situés sur leur direction de propagation sauf lorsque ceux-ci sont rompus.

Les tableaux ci-après regroupent les valeurs des déformations d'extension au contour de la singularité pour des sollicitations mixtes traction-compression. Celles encadrées sont les maxima.

θ°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$E\epsilon$ daN/mm ²	-1,42	-1,43	-1,45	-1,43	-1,35	-1,20	-0,98	-0,70	-0,41	-0,14

Tableau VI-6

Traction monoaxiale unitaire.
Inclusion adhérente rigide.

θ°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$E\epsilon$ daN/mm ²	-1,34	-1,46	-1,65	-1,76	-1,72	-1,52	-1,18	-0,76	-0,36	-0,30

Tableau VI-7

Sollicitation biaxiale mixte
traction-compression $p_1 = p_2 = 1$ daN/mm²
Inclusion rigide adhérente.

θ°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$E\epsilon$ daN/mm ²	-5,74	-5,74	-5,71	-5,56	-5,24	-4,71	-3,98	-3,12	-2,24	-1,70

Tableau VI-8

Traction biaxiale $p_1 = 4 p_2$, $p_2 = 1$ daN/mm²
Inclusion rigide adhérente.

La figure VI-7 donne les courbes représentant les variations de la déformation d'extension au contour de la singularité dans le cas de la traction monoaxiale (tableau VI-6).

Leur allure est la même que pour les sollicitations mixtes compression-traction ou pour la traction biaxiale.

Les déformations d'extension varient peu autour de leur valeur maximale puis décroissent rapidement dès que l'on se rapproche de 90°, l'axe de la plus grande contrainte de traction appliquée au modèle étant choisi comme origine des angles.

La microfissure qui résulte de cette distribution théorique de déformations d'extension s'ouvre pour la valeur de θ correspondant au maximum absolu de l'extension sur le contour. Elle se propage ensuite brutalement le long de la calotte fortement sollicitée vis

VARIATIONS DE LA DEFORMATION D'EXTENSION
 SUR LE CONTOUR DU GRANULAT ADHERENT
 CAS DE LA TRACTION ($P_1 > P_2$)

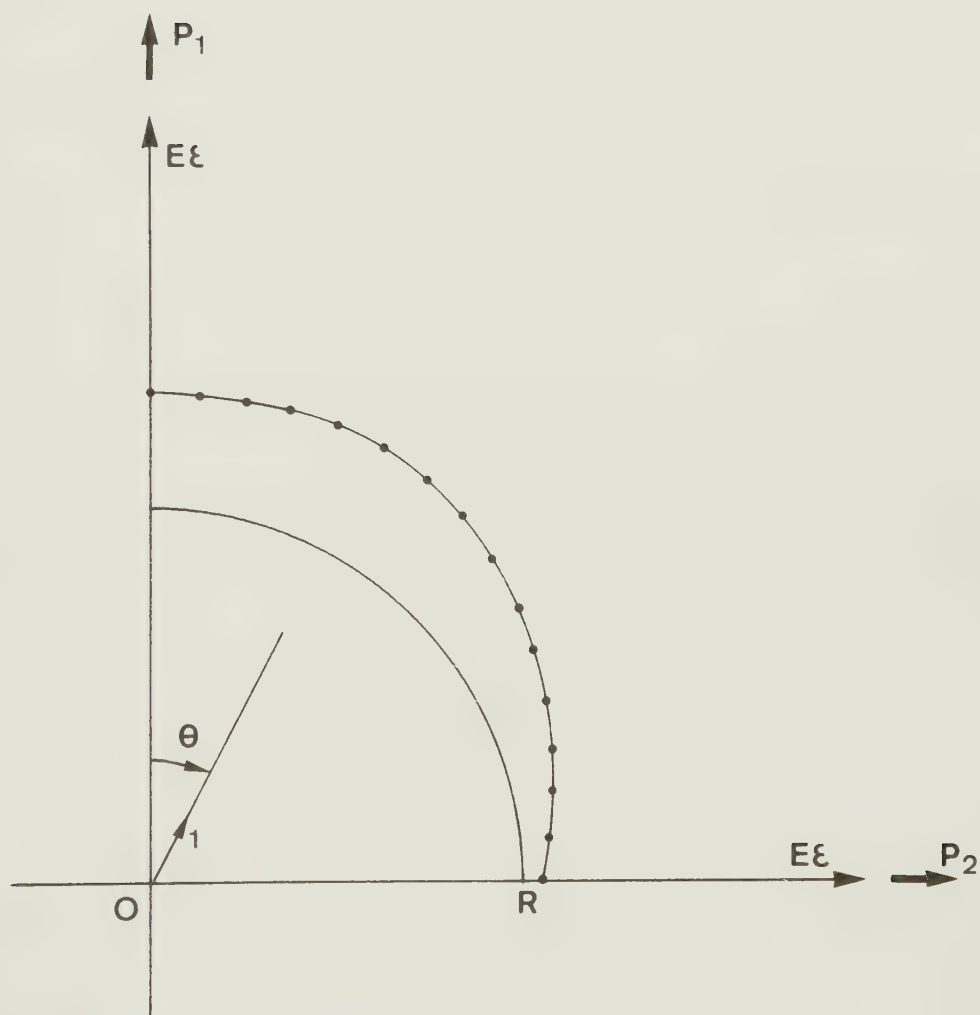


FIG. VI-7

à vis des extensions, lorsque le granulat n'est pas rompu préalablement, puis se prolonge dans la matrice perpendiculairement à la direction de la plus grande traction.

On trouve ainsi une figure de fissuration tout à fait conforme aux observations expérimentales que nous avons rappelées précédemment.

VI -232. Cas du trou libre.

Les tableaux ci-après regroupent les valeurs de la déformation d'extension maximale au contour du trou.

Celles encadrées sont les maxima de la déformation d'extension.

θ°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$E\epsilon$ daN/mm ²	-0,20	-0,13	-0,40	-2,00	-3,95	-6,04	-8,00	-9,60	-10,60	-11,0

Tableau VI-9

Traction biaxiale $p_1 = 4 p_2$, $p_2 = 1$ daN/mm²
Cas du trou libre.

θ°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$E\epsilon$ daN/mm ²	-0,80	-0,75	-0,61	-0,40	-0,14	-0,69	-2,0	-3,10	-3,76	-4,00

Tableau VI-10

Sollicitation mixte
traction-compression $p_1 = p_2 = 1$ daN/mm²
Cas du trou libre.

Les valeurs théoriques de l'extension au contour du trou libre sont maximales pour $\theta = 90^\circ$, l'axe de la plus grande traction étant pris comme référence.

C'est donc en ce point que doit s'ouvrir la première microfissure, pour se propager ensuite perpendiculairement à la direction de la plus grande traction.

La figure de fissuration théorique obtenue s'accorde bien avec les observations expérimentales.

VI -3. CONCLUSIONS ET APPLICATIONS.

Le critère d'extension maximale apporte au comportement du modèle théorique de béton, une explication satisfaisante tant du point de vue des traces de la surface d'état limite dans le plan (p_1 , p_2) que du point de vue du développement des microfissures lors du passage à l'état limite réversible.

La théorie de COULOMB-MOHR, comme nous l'avons déjà montré, ne permet pas d'expliquer l'allure de la microfissuration en compression biaxiale et doit, par conséquent, être abandonnée.

VI -31. Application à la détermination des processus de fissuration dans le modèle élémentaire, pour un granulat rigide adhérent.

Dès lors qu'on connaît le critère qui régit le comportement du modèle théorique de béton, il est possible de donner une explication aux mécanismes de rupture de la pâte au voisinage de la singularité et aux différents cheminements des microfissures que l'on observe dans la pâte pure de ciment et dans le mortier. On peut, en particulier, interpréter l'existence des cônes de mortier adhérents à la singularité.

Nous avons schématisé la pâte de ciment en un matériau composite dont les singularités sont des trous libres pour mieux traduire sa microstructure poreuse. De même, nous avons schématisé le mortier en un matériau dont les singularités sont des granulats rigides adhérents.

Si la matrice peut être considérée comme un milieu homogène lorsqu'il s'agit de déterminer l'origine des microfissures

qui se produisent au niveau des collages, il faut tenir compte, dès lors qu'on étudie le cheminement de la fissuration dans la matrice, du caractère hétérogène de ce matériau, le problème étant alors posé à l'échelle de la structure même de la matrice.

Nous avons considéré le cas de la compression monoaxiale unitaire pour retrouver les figures observées par CALVET.

L'ouverture de la microfissure se produit, pour les deux types de matrices, lorsque :

$$r = R \quad \text{et} \quad \theta = 50^\circ$$

VI -311. Cheminement dans la matrice de mortier.

Si nous traçons les courbes d'égales contraintes principales (Fig. VI-8a et VI-8b), nous pouvons mettre en évidence dans la matrice, au voisinage de la singularité, une zone dans laquelle la contrainte principale majeure est une compression supérieure à l'unité et où la contrainte principale mineure est une compression.

Dans cette zone, les singularités adhérentes de la matrice, à fine échelle, sont donc soumises à une compression biaxiale qui a pour conséquence de les éloigner de l'irréversibilité, étant donné l'allure du convexe qui limite cette dernière (19).

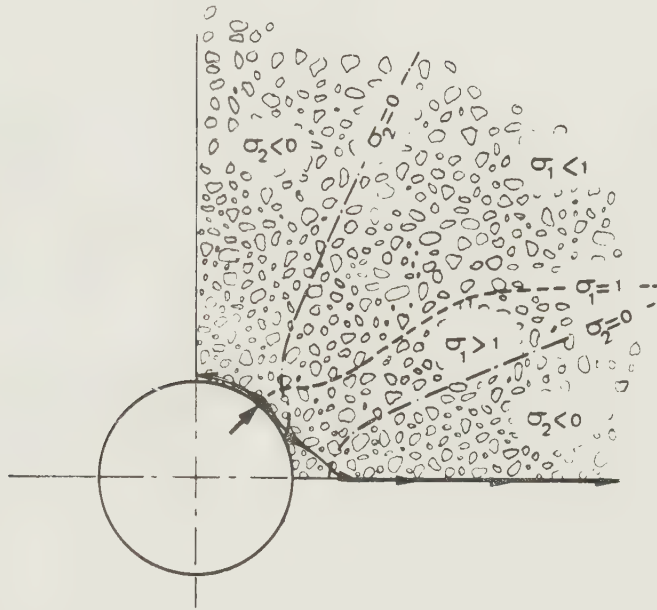
Cette zone se présente comme un cône que l'on peut limiter à un angle d'environ 40° et dont le sommet se trouve sur l'axe de chargement du modèle ($\sigma_1 \simeq 1,1$; $\sigma_2 \simeq 0,02$).

Cette limite coïncide à peu près avec la courbe reliant les points d'extension maximale sur les radiales, θ variant entre 0° et 50° .

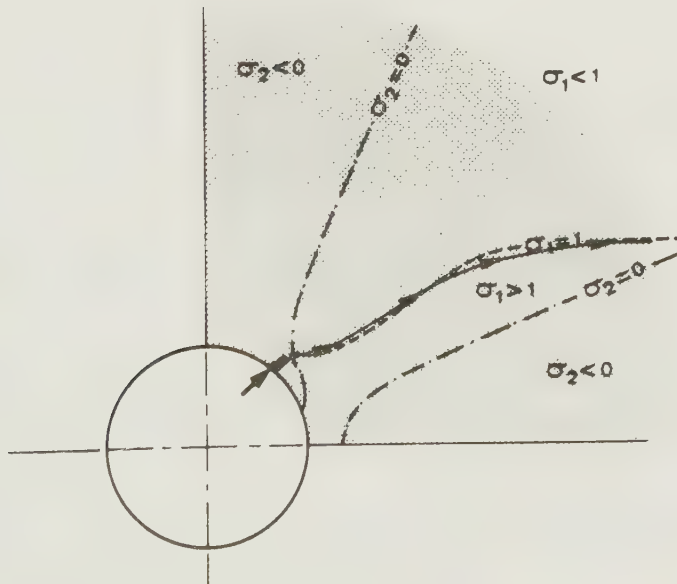
La fissure ouverte au contour de la singularité à $\theta = 50^\circ$, se propage, d'une part, vers $\theta = 90^\circ$ le long du granulat en suivant les fortes extensions (cf. tableau VI-3) et, d'autre part, vers $\theta = 0^\circ$ en suivant encore les fortes extensions mais en évitant la zone renforcée par freinage biaxial. Les deux cônes se trouvent maintenus en contact avec la singularité après rupture.

Localement, la rupture se produit pour chaque grain de la matrice suivant le type défini en compression monoaxiale, par ouverture d'une microfissure à 50° .

CHEMINEMENT DE LA FISSURE
DANS LE MODELE DE CALVET
CAS DU GRANULAT ADHERENT



a) Matrice de mortier



b) Matrice de pâte pure

→ cheminement de la fissure

Ceci explique la formation d'une fissuration en échelons telle que l'a observée STROEVEN (27).

VI -312. Cheminement dans la matrice de pâte pure de ciment.

Nous pouvons formuler un raisonnement identique à celui qui précède. Cependant, dans le cas du trou libre, l'allure du convexe limite de réversibilité montre que le renforcement produit par une sollicitation est très important. La zone frettée sera donc plus étendue que précédemment. La ligne de fissuration suit la courbe des σ_1 unitaires à partir de $\theta = 50^\circ$.

Le cheminement de la fissure, de pore en pore, confère à l'évolution de ce phénomène un caractère explosif qui provoque l'ouverture de la fissure parallèlement à la direction de chargement jusqu'au plateau de la machine d'essai.

VI -32. Comparaison des résistances à l'état limite réversible des modèles en mortier et en pâte pure de ciment. Influence de la nature de la singularité.

On constate, en comparant les valeurs des extensions maximales dans les modèles à granulat adhérent et à trou libre que leurs résistances doivent être dans le rapport 2 :

$$\frac{\text{Résistance granulat adhérent}}{\text{Résistance trou libre}} = \frac{E\epsilon_{\max}(\text{GA})}{E\epsilon_{\max}(\text{TL})} = \frac{-0,5}{-1} = 2$$

Les valeurs obtenues par CALVET, pour la première fissure, confirment cette remarque, ainsi que le montrent les résultats ci-après.

Résistances en KN (première fissure)	matrice de pâte pure	matrice de mortier
Granulat adhérent	13,40	34,30
Trou libre	8,75	14,50

VI -33. Influence de la nature de l'adhérence.

La représentation schématique que nous avons choisie ne permet pas, ainsi que nous l'avons remarqué au chapitre III, de prendre en compte la résistance du collage. Celle-ci est considérablement affectée par la nature minéralogique des phases en présence, comme l'a montré FARRAN (4).

Nous avons proposé, dans le chapitre III, de simuler la résistance du collage en remplaçant le granulat initial par un granulat de caractéristiques mécaniques différentes.

Une faible résistance du collage peut ainsi correspondre à un granulat plus déformable.

On peut ainsi retrouver les résultats obtenus par MASO sur les résistances des mortiers à la compression simple lorsque la nature minéralogique des granulats varie. Aux granulats de faible adhérence correspondent des résistances faibles ; nous avons montré qu'aux granulats très déformables correspondent également des résistances faibles, ce qui justifie notre hypothèse de représentation de la nature de l'adhérence.

Les valeurs extrêmes obtenues dans le cas du trou libre et dans celui de la singularité non-adhérente confirment cette conclusion, ainsi que le montrent les résultats expérimentaux ci-après, empruntés à CALVET.

Résistances en KN (première fissure)	matrice de pâte pure	matrice de mortier
Granulat non-adhérent	8,75	17,50
Trou libre	8,75	14,50

VI -34. Conclusions.

L'ensemble des résultats obtenus nous permet de justifier d'une manière complète l'hypothèse du critère d'extension maximale pour le modèle élémentaire de béton.

Nous avons pu remarquer la similitude de comportement entre le modèle théorique élémentaire et le matériau réel, ce qui nous permet de confirmer, par anticipation sur la troisième partie de notre travail, les conclusions de MASO sur le mécanisme de rupture des mortiers et bétons.

Nous avons pensé qu'il convenait de souligner particulièrement ces résultats puisque le critère d'extension maximale, initialement proposé par de SAINT-VENANT, puis repris et développé par BRANDENBERGER (14), (15), est aujourd'hui presque universellement abandonné. Il recèle, en effet, selon certains auteurs (28), des défauts importants dès lors qu'on se livre à de minutieuses vérifications.

Il semble cependant que la théorie de BRANDENBERGER, selon laquelle l'état limite est atteint à la suite d'une décohé- sion moléculaire du matériau lorsque l'allongement de la distance entre les molécules dépasse un certain seuil, soit davantage en accord avec la microstructure des bétons, et des matériaux granulaires poreux, que la théorie de COULOMB-MOHR qui repose sur l'hypothèse du glissement interne.

Dans le cas particulier des mortiers et bétons, il serait d'ailleurs plus exact d'employer le terme de décohé- sion à l'échelle des cristaux de sels hydratés du ciment, à la suite d'une extension excessive, que celui de décohé- sion moléculaire.

Ces conclusions nous conduisent à remarquer, d'une manière tout à fait générale, qu'il semblerait plus logique que les critères d'états limites soient formulés en déformations et non pas en contraintes. Ces dernières sont, en effet, des entités purement abstraites, excellents intermédiaires de calcul, mais sans aucune relation avec la réalité physique du comportement d'un matériau.

Les déformations, au contraire, sont plus proches de cette réalité physique et il ne serait pas surprenant que certains comportements encore incomplètement expliqués ou mal connus, de matériaux autres que ceux que nous avons étudiés, puissent être mieux définis par une approche en déformations des mécanismes d'irréversibilité et de rupture, sans pour autant ramener tous les critères à celui de l'extension maximale.

On peut observer, en effet, dans le cas de matériaux granulaires cohérents à matrice métallique (3), des figures de fissuration et de rupture qui se présentent sous la forme de glissements à

l'échelle locale de la matrice. Dans ce cas, la théorie de la courbe intrinsèque de CAQUOT semble plus appropriée que le critère de BRANDENBERGER.

T R O I S I E M E P A R T I E
=====

INFLUENCE DES INTERFERENCES ENTRE PLUSIEURS SINGULARITES
SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DU MODELE THEORIQUE.
GENERALISATION AU CAS D'UN MODELE POLYGRANULAIRE.

Pour étendre au matériau réel les conclusions de la seconde partie, nous devons entreprendre l'analyse de modèles plus complexes que ceux que nous avons étudiés jusqu'ici.

En particulier, il est indispensable de tenir compte de l'influence mutuelle qui s'exerce entre les multiples singularités présentes dans le matériau.

Nous avons, pour cela, conservé une représentation plane à deux phases homogènes, les éléments de plus gros diamètre étant schématisés par des singularités circulaires, en nombre quelconque, disposées suivant un arrangement aléatoire puisqu'on connaît mal les lois de la distribution géométrique des granulats dans la plupart des matériaux granulaires cohérents, comme par exemple les mortiers et bétons (27).

Le problème de la déformation élastique d'une plaque dans laquelle sont insérées plusieurs inclusions n'a été abordé que d'une manière très fragmentaire et on ne connaît pas de loi générale pour déterminer les effets des interférences des champs de contraintes et de déformations locales.

Nous avons donc été amené à proposer une solution approchée de ce problème.

Après avoir vérifié la validité de notre théorie par comparaison aux résultats d'autres chercheurs (29), (30), (31), nous avons étudié le comportement du modèle polygranulaire à la limite du domaine de réversibilité à partir de la définition de cas fondamentaux de voisinage de singularités et suivant la méthode définie dans la seconde partie.

On peut alors, aisément, obtenir le comportement du matériau réel en combinant les cas fondamentaux d'une manière quelconque.

Dans le premier chapitre nous avons défini une solution théorique approchée pour déterminer les éléments principaux des contraintes et des déformations dans le cas de plusieurs singularités.

Dans le second chapitre nous avons appliqué cette théorie à l'étude du comportement de modèles polygranulaires de béton à la limite du domaine de réversibilité.

CHAPITRE VII

DETERMINATION DES ETATS DE CONTRAINTES
ENGENDRES DANS UNE PLAQUE INFINIE ELASTIQUE
PAR UNE DISTRIBUTION ALEATOIRE D'INCLUSIONS CIRCULAIRES

La théorie des potentiels complexes, associée à un système de coordonnées polaires, nous a permis de résoudre ce problème dans le cas d'une inclusion circulaire unique, indépendamment de la nature de sa liaison à la matrice.

Lorsqu'il y a deux inclusions, on peut encore appliquer cette théorie en l'associant à un système de coordonnées bipolaires (32).

Dès qu'il y a plus de deux singularités, la plupart des chercheurs utilisent la méthode des éléments finis (33). Cette technique, qui traduit sous forme variationnelle les équations de l'élasticité, ne se prête pas aisément à l'analyse ponctuelle des états de contraintes puisqu'elle suppose une décomposition du milieu étudié en un nombre fini de polygones réguliers de dimensions finies. Dans le cas de gradients de contraintes localisés, l'incertitude relative sur les résultats numériques obtenus peut alors être importante (30).

C'est pourquoi nous avons préféré chercher une solution plus générale, en tenant compte de la symétrie et de la réciprocité des rôles joués par chaque inclusion.

Il faudrait pouvoir exprimer, en grandeur algébrique et en orientation, l'état de contraintes et de déformations engendré dans le modèle par la distribution de singularités comme une combinaison des perturbations que crée chaque inclusion lorsqu'elle est insérée isolément dans la matrice.

L'étude de l'influence mutuelle qui s'exerce entre les singularités requiert des développements mathématiques très complexes. Nous avons pensé que la restriction de cette théorie à la détermination des seuls scalaires σ_1 et σ_2 pourrait mener à des résultats suffisamment précis.

Nous avons pu vérifier que nos résultats, coïncident à moins de 10 % avec ceux obtenus par l'application des méthodes citées précédemment.

VII -1. DEFINITION DES FACTEURS D'INFLUENCE D'UNE SINGULARITE SUR UN CHAMP DE CONTRAINTES UNIFORMES.

Nous avons traduit l'influence exercée par une singularité sur un champ uniforme de contraintes par des coefficients λ_j^i définis par les relations ci-après, ($j = 1, 2$)

$$\forall M \in (xoy) \quad , \quad \lambda_1^i(M) = \frac{\sigma_1^i(M)}{\sigma_1^*(M)}$$

avec :

$\sigma_1^i(M)$ contrainte principale majeure au point M considéré, en présence de la singularité i seule,

$\sigma_1^*(M)$ contrainte principale majeure en l'absence de la singularité (champ uniforme initial).

λ_1^i est le facteur d'influence relatif à la contrainte principale majeure.

De même :

$$\forall M \in (xoy) \quad , \quad \lambda_2^i(M) = \frac{\sigma_2^i(M)}{\sigma_2^*(M)}$$

Les facteurs d'influence sont des fonctions implicites des caractéristiques mécaniques et géométriques de la singularité et du type de la liaison de celle-ci à la matrice.

La définition que nous venons de donner doit être modifiée en ce qui concerne la sollicitation monoaxiale. En effet, $\sigma_2(M)$ est alors nulle, et nous devons définir $\lambda_2^i(M)$ par un passage à la limite.

$$\forall M \in (xoy) \quad , \quad \lambda_2^i(M) = \lim_{\sigma_2^*(M) \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma_2^i(M)}{\sigma_2^*(M)} \right)$$

Nous n'avons pas cherché à établir mathématiquement l'existence de cette limite. Nous l'avons constatée, numériquement, dans chaque cas d'application.

Lorsque les inclusions sont très rapprochées, la détermination de λ_j^i devient imprécise. On peut remarquer que, dans ce cas particulier, le choix d'un modèle plan ne se justifie plus car les distributions de contraintes dans l'épaisseur du modèle, au voisinage des granulats, jouent alors un rôle très important dans le comportement mécanique.

Finalement, pour une singularité unique, i , nous pouvons écrire :

$$\forall M \in (xoy) \quad \sigma_j(M) = \lambda_j^i(M) \cdot \sigma_j^*(M) \quad , \quad j = 1,2$$

VII -2. INTERFERENCES ENTRE LES FACTEURS D'INFLUENCE DANS LE CAS DE PLUSIEURS SINGULARITES.

Les relations précédentes peuvent s'écrire, pour n singularités :

$$\forall M \in (xoy) \quad \sigma_j(M) = f_j(\lambda_j^1, \lambda_j^2, \dots, \lambda_j^k, \dots, \lambda_j^n) \cdot \sigma_j^*(M) \\ j = 1,2$$

Les fonctions f_j étant symétriques en λ_j^i , i variant entre 1 et n par valeurs entières.

Physiquement, ces équations traduisent que la perturbation générale du champ est une certaine fonction des perturbations individuelles de chaque inclusion.

Nous avons approché les fonctions f_j ($j = 1,2$) par une fonction symétrique du premier degré en chaque coefficient d'influence. On pourrait éventuellement procéder d'une manière plus précise, par des développements en polynômes par exemple, d'une manière analogue à la détermination des fonctions de contraintes en élasticité plane.

Dans le cas du premier degré, deux solutions se présentent : la somme pondérée, d'une part, et le produit, d'autre part.

La somme pondérée revient à calculer la moyenne arithmétique des contraintes principales, ce qui est en désaccord formel avec la réalité expérimentale. Si nous considérons, en effet, une distribution de singularités rigides adhérentes, disposées en bandes longitudinales parallèles à un chargement monoaxial, la contrainte principale majeure est, entre deux inclusions consécutives, supérieure à la valeur qu'elle prendrait s'il n'y avait qu'une singularité dans la matrice. Elle ne peut donc pas être égale à la moyenne arithmétique des σ_1 obtenus pour chaque inclusion prise isolément.

La somme non pondérée ne peut pas être retenue car, en présence de singularités isolées les unes des autres, ou bien loin de toute inclusion, on ne retrouverait pas le champ uniforme initial.

Le produit, par contre, satisfait toutes les conditions aux limites. Nous pouvons alors écrire :

$$f_j (\lambda_j^1, \lambda_j^2 \dots \lambda_j^n) = \prod_{k=1}^n \lambda_j^k, \quad j = 1, 2$$

VII -3. CONCLUSIONS. VERIFICATION DE LA VALIDITE DE LA THEORIE DES FACTEURS D'INFLUENCE.

Il est indispensable de comparer nos résultats à ceux des auteurs qui ont utilisé d'autres méthodes pour la détermination des contraintes principales dans la matrice.

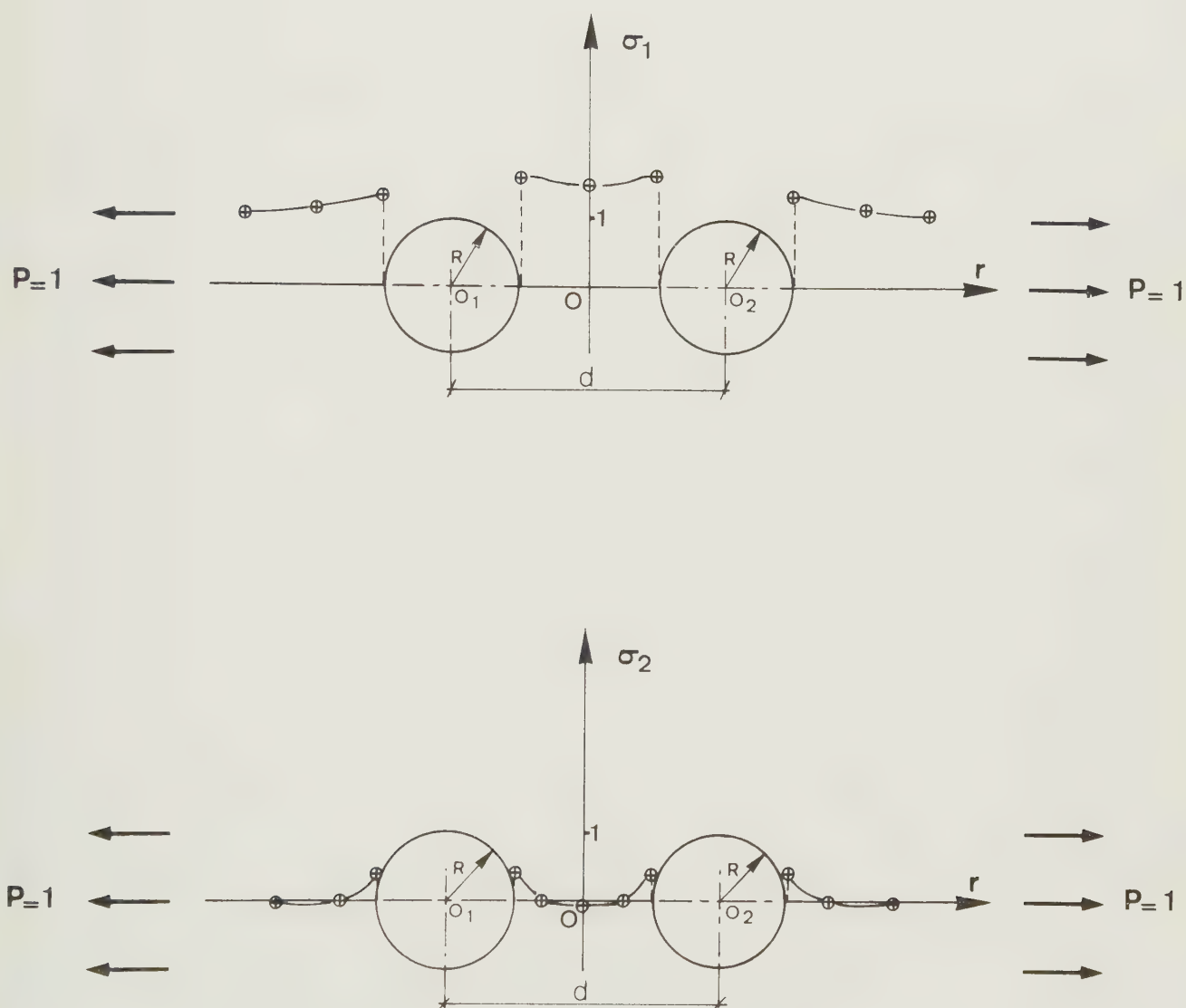
VII -31. Théorie des potentiels complexes en coordonnées bipolaires.

SHIOYA (29) et SAVIN (31) ont déterminé la déformation élastique de la matrice, respectivement dans le cas de deux granulats rigides adhérents et dans le cas de trous libres.

Nous avons étudié les mêmes arrangements géométriques et les courbes des figures VII-1 et VII-2 montrent la bonne coïncidence de la théorie des facteurs d'influence et de la théorie de l'élasticité en coordonnées bipolaires.

COMPARAISON DE LA THEORIE DES FACTEURS D'INFLUENCE AUX TRAVAUX DE SHIOYA

Singularités rigides adhérentes, $d = 4R$

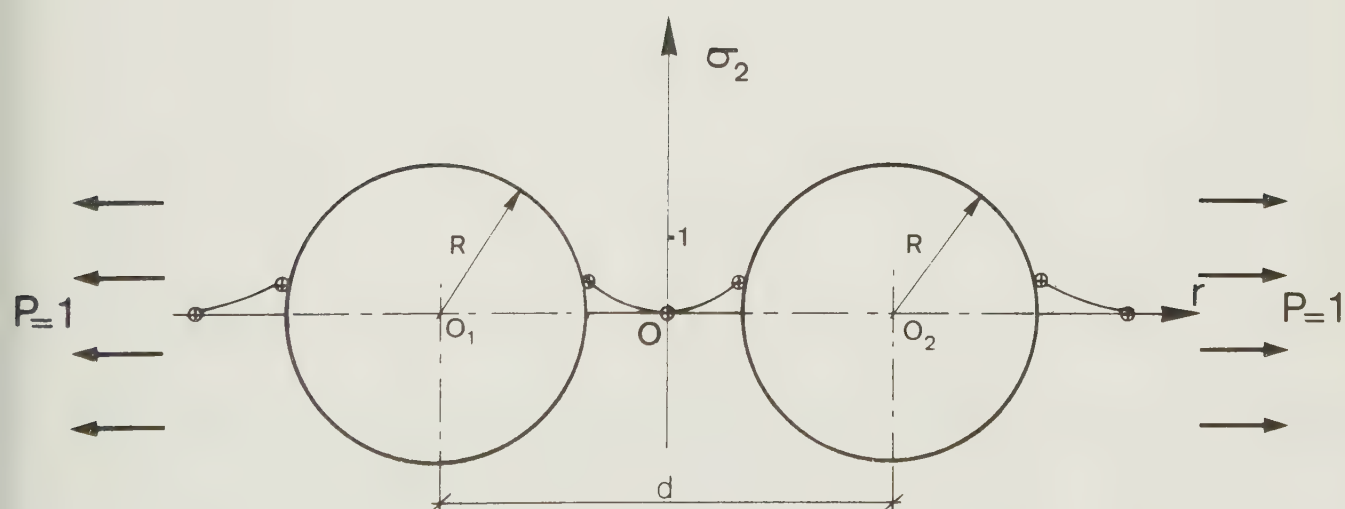
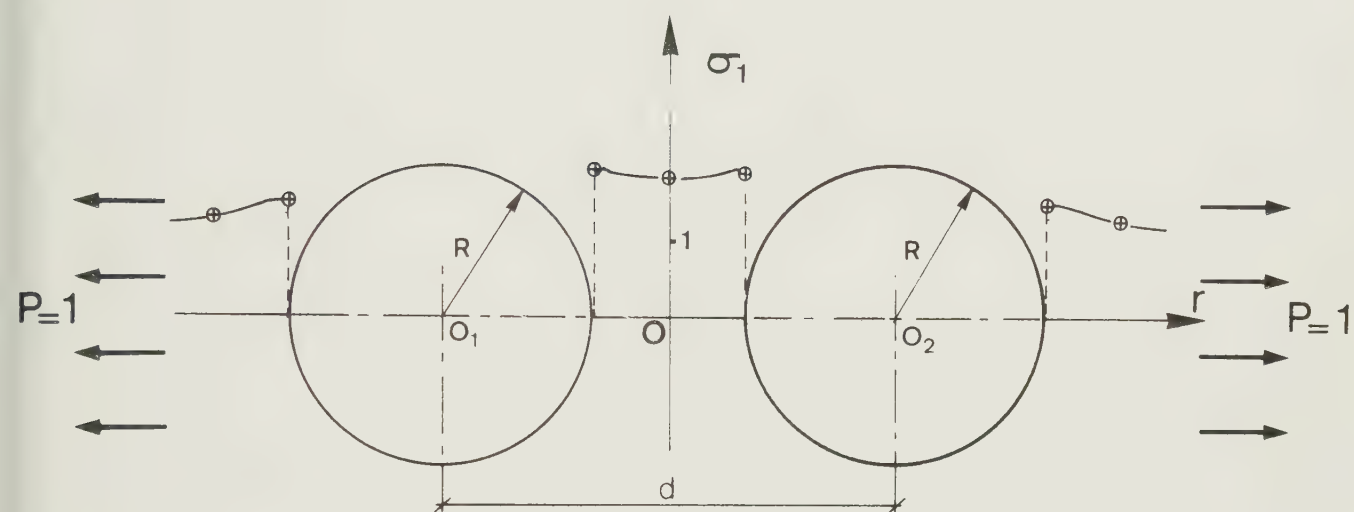


o théorie des facteurs d'influence
+ résultats de SHIOYA

FIG.VII-1 a)

COMPARAISON DE LA THEORIE DES FACTEURS D'INFLUENCE AUX TRAVAUX DE SHIOYA

Singularités rigides adhérentes, $d = 3R$



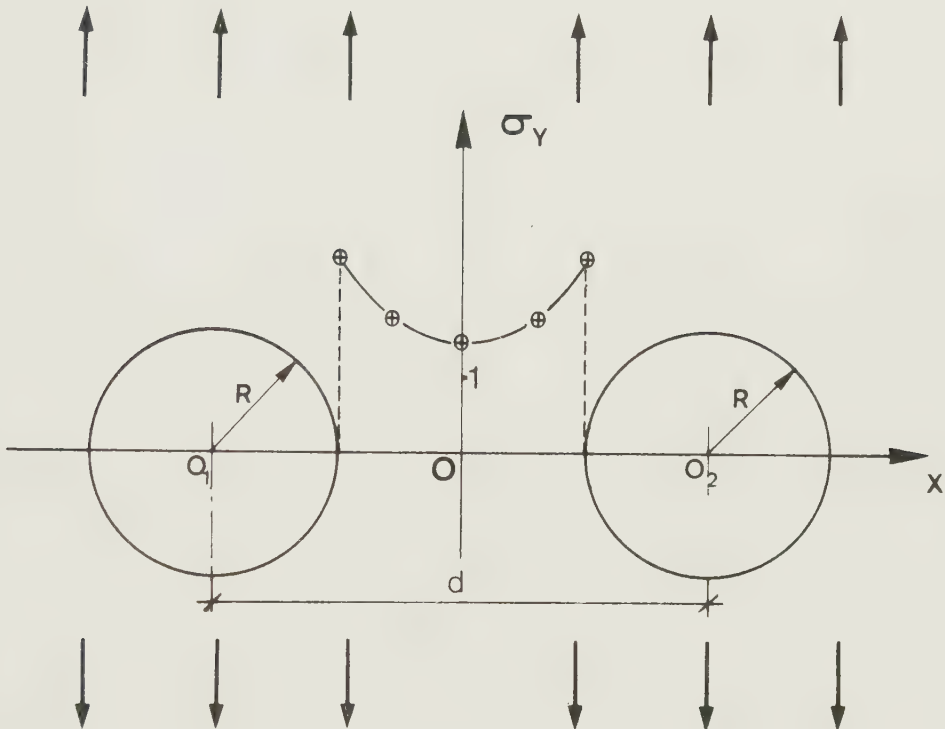
o théorie des facteurs d'influence
+ résultats de SHIOYA

FIG. VII-1 b)

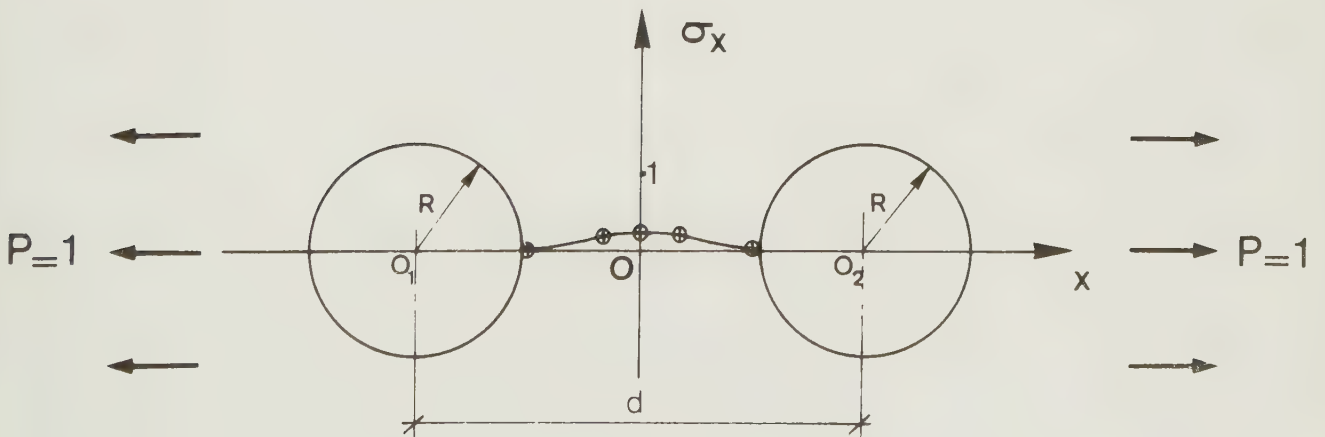
COMPARAISON DE LA THEORIE DES FACTEURS D'INFLUENCE AUX TRAVAUX DE SAVIN

Trous libres, $d = 4R$

$P=1$



$P=1$



o théorie des facteurs d'influence
+ résultats de SAVIN

FIG. VII - 2

MODELE D'IQBAL ET KROKOSKY

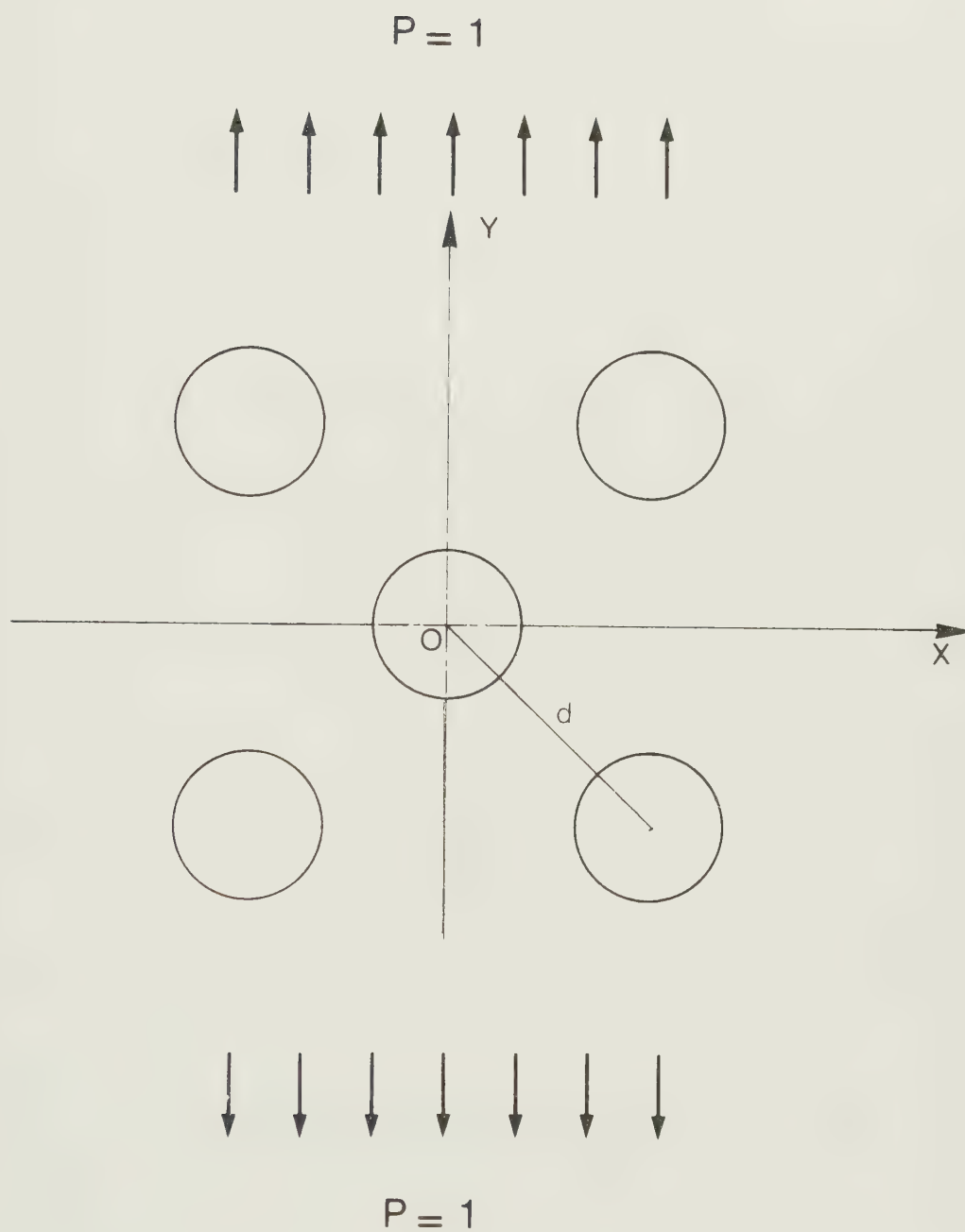
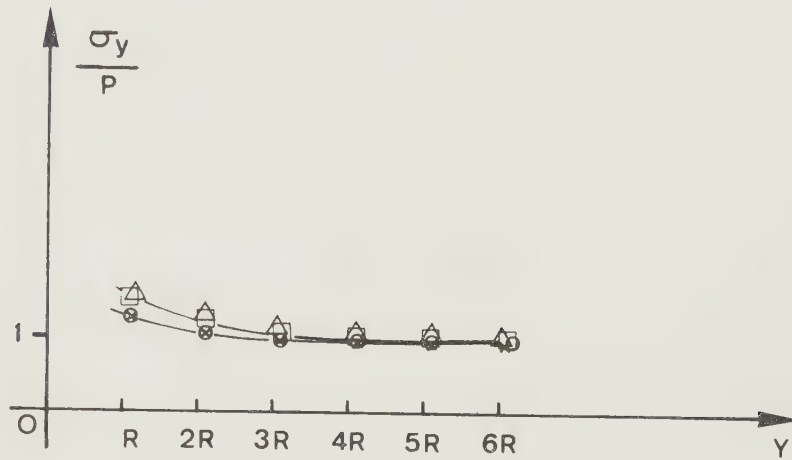


FIG. VII-3

COMPARAISON DE LA THEORIE DES FACTEURS D'INFLUENCE AUX TRAVAUX D'IQBAL ET KROKOSKY

Singularités rigides adhérentes

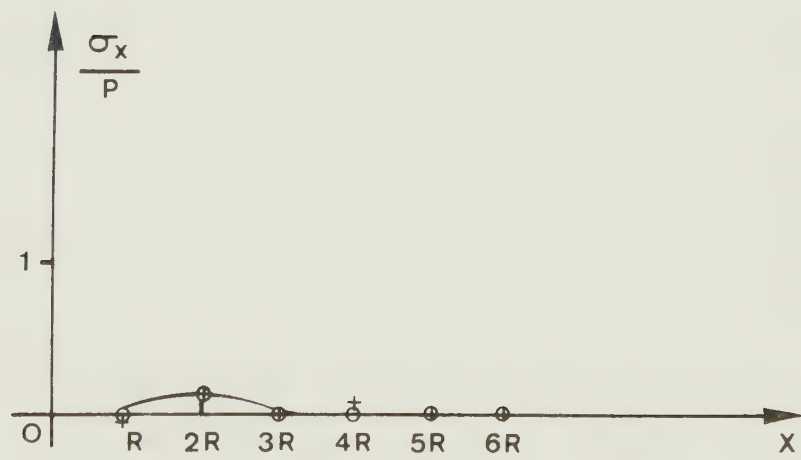
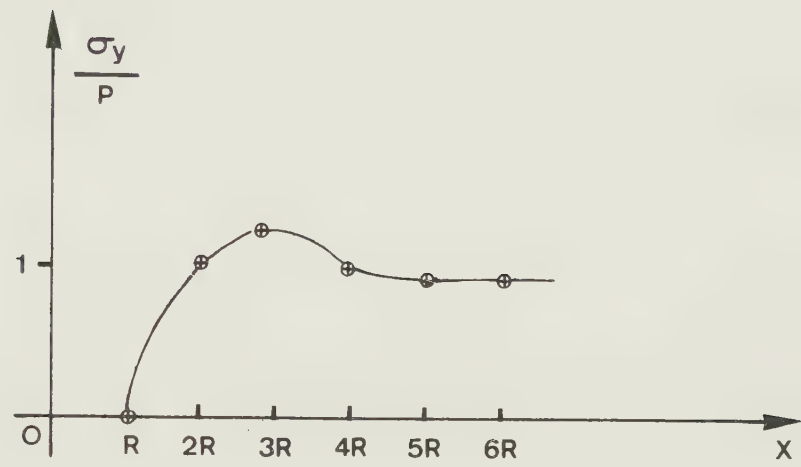


$d=4R$ { o théorie des facteurs d'influence
 + résultats d'IQBAL et KROKOSKY
 $d=8R$ { Δ théorie des facteurs d'influence
 □ résultats d'IQBAL et KROKOSKY

FIG. VII - 4 a)

COMPARAISON DE LA THEORIE DES FACTEURS D'INFLUENCE AUX TRAVAUX D'IQBAL ET KROKOSKY

Singularités rigides adhérentes, $d = 4R$



o théorie des facteurs d'influence
+ résultats d'IQBAL et KROKOSKY

FIG.VII-4 b)

VII -32. Théorie des éléments finis.

IQBAL et KROKOSKY (30) ont étudié le cas de cinq inclusions circulaires, disposées en quinconce, la matrice étant sollicitée en traction monoaxiale.

Les courbes de la figure VII-4 représentent les variations de σ_1 et σ_2 suivant ox et oy , pour chacune des deux théories, celle des facteurs d'influence et celle des éléments finis.

On peut constater la bonne coïncidence des résultats obtenus.

VII -33. Conclusions.

La méthode approchée que nous avons proposée permet de déterminer les valeurs des contraintes principales en tout point de la matrice avec une précision comparable à celle des autres techniques utilisées pour l'analyse des modèles à plusieurs singularités.

On peut ensuite définir les valeurs des déformations principales en tout point de la matrice et étudier ainsi l'influence de la multiplicité des inclusions sur le comportement des modèles à l'état limite, sur les mécanismes de microfissuration ou de plastification locale, notamment.

CHAPITRE VIII

ETUDE DU COMPORTEMENT A LA LIMITE DU DOMAINE DE REVERSIBILITE
 D'UN MODELE DE BETON A PLUSIEURS SINGULARITES.
 APPLICATION AU CAS DU MATERIAU REEL.

Il est impossible de décrire rigoureusement l'arrangement géométrique des granulats dans un béton.

On peut cependant définir des cas fondamentaux de voisinage entre les singularités et, en les combinant, recomposer le milieu granulaire.

Nous avons étudié la distribution des contraintes principales sur le contour des singularités dans leur zone d'influence mutuelle.

Nous avons considéré les deux cas extrêmes de l'inclusion rigide adhérente et du trou libre, les autres s'insérant continûment entre eux.

VIII -1. DEFINITION DES CAS FONDAMENTAUX DE VOISINAGE ENTRE
 SINGULARITES.

VIII -11. Généralités.

L'étude des variations des facteurs d'influence λ_j au voisinage d'une inclusion nous a permis de distinguer trois cas fondamentaux de voisinage.

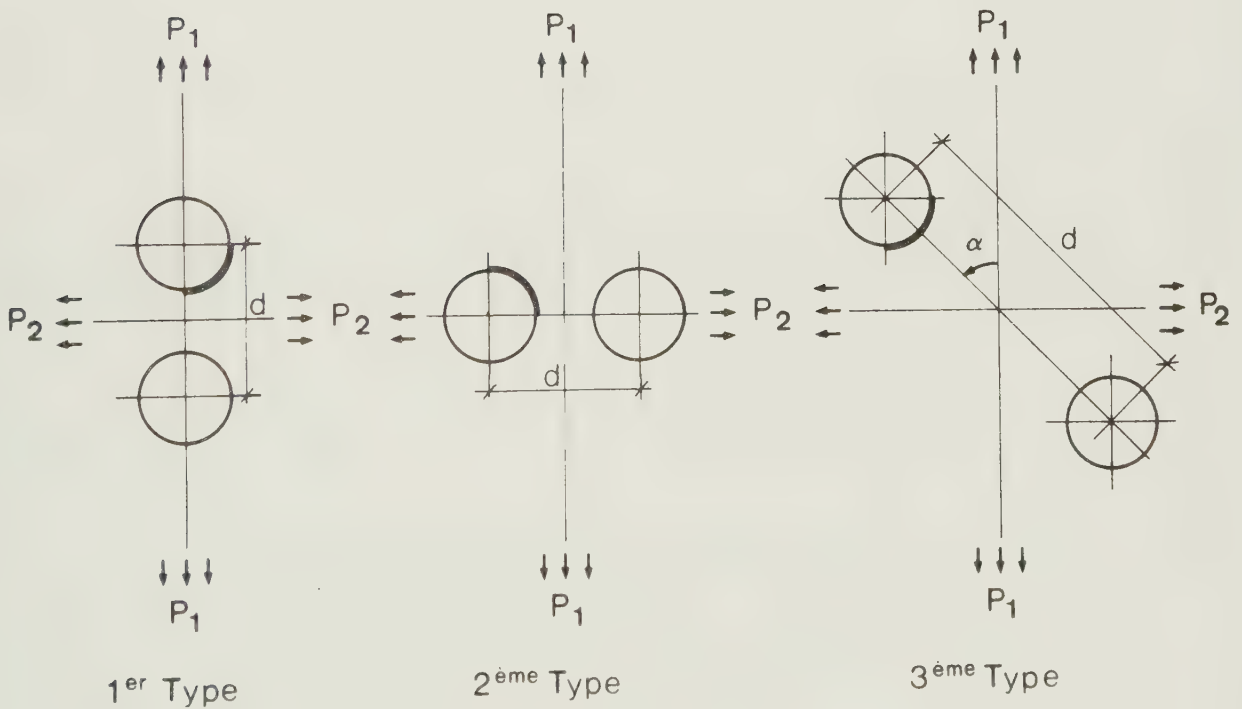
Nous pouvons remarquer, en effet, l'existence de zones à λ_j supérieurs à l'unité et de zones à λ_j inférieurs à l'unité. Dans le premier cas nous dirons qu'il y a "concentration" de contraintes et dans le second cas qu'il y a "dépression" de contraintes.

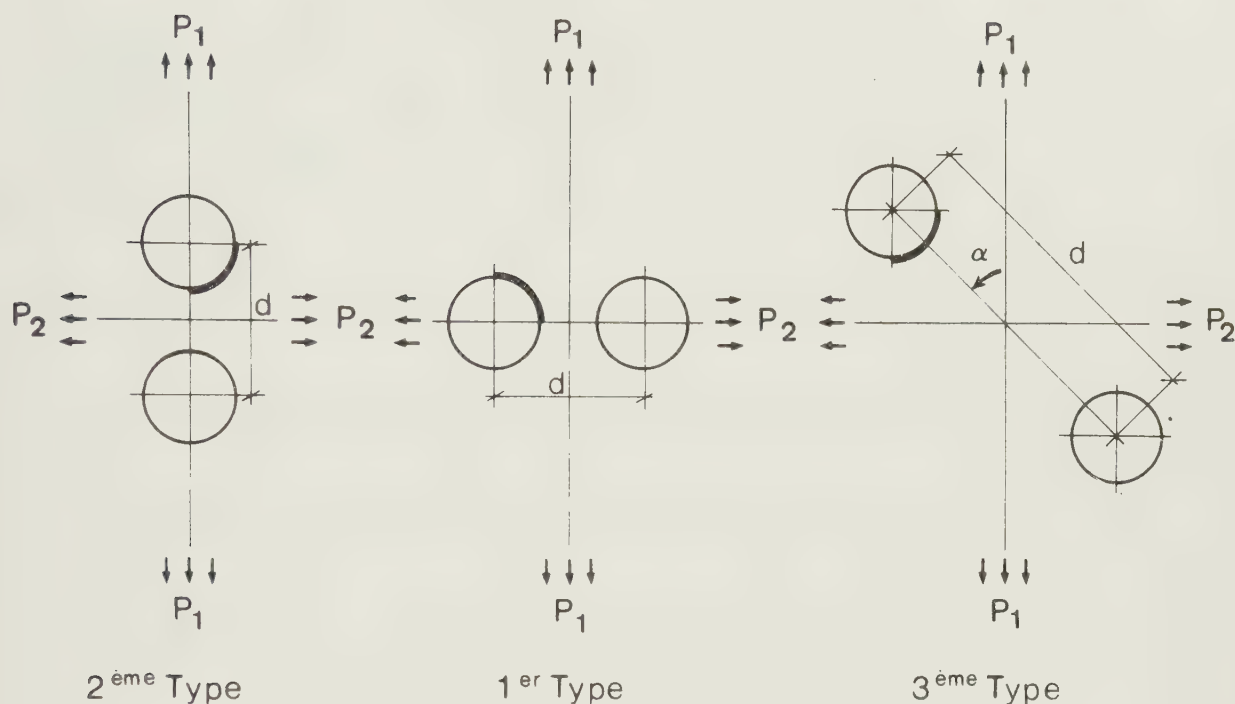
La zone de concentration de contraintes en λ_1 est située dans un secteur circulaire de contour variable contenant l'axe de la plus forte sollicitation.

Dans le cas de deux inclusions, il peut se produire trois types de voisinage, selon que se chevauchent deux zones de concentration, deux zones de dépression ou bien une zone de concentration et une zone de dépression.

Cela nous mène aux schémas ci-après.

VIII -12. Cas de singularités adhérentes rigides.



VIII -13. Cas de trous libres.VIII -2. ETUDE DE LA DISTRIBUTION DES CONTRAINTES PRINCIPALES
DANS CHAQUE TYPE DE VOISINAGE.

Nous avons considéré deux singularités identiques. L'influence mutuelle s'exerce alors sur une zone plus étendue et les modifications qui affectent les distributions de contraintes y sont plus importantes.

Nous avons donné à d (§ VIII -12. et 13.) les valeurs suivantes : R , $R/2$, $R/4$, R étant le rayon commun des singularités ; nous avons pris α égal à 45° .

Nous avons étudié chacun des trois types de voisinage pour les deux natures de singularités.

VIII -21. Cas de granulats rigides adhérents.

Les tableaux VIII-1 à VIII-9 regroupent les valeurs des contraintes principales au contour des singularités, dans la zone d'influence mutuelle, pour les trois types de voisinage, et pour des sollicitations p_1 et p_2 variant respectivement, par valeurs entières, entre - 1 et + 5 et 0 et 1. Nous avons limité cette zone d'influence mutuelle, par raison de symétrie, à un quart de cercle, porté en trait gras sur les figures des § VIII -12. et 13.

La superposition de deux zones de concentration de contraintes mène à une concentration encore plus intense (1er type).

La superposition de deux zones de dépression mène à une dépression encore plus intense (2ème type).

Ces conclusions apparaissent clairement lors d'analyses en photoélasticité.

VIII -22. Cas de trous libres.

Les tableaux VIII-10 à VIII-18 regroupent les valeurs des contraintes principales au contour des trous, dans la zone d'influence mutuelle dans des conditions identiques à celles du § VIII -21.

Nous disposons, dans le cas particulier du trou, d'une information supplémentaire : puisque le contour des trous est une isostatique, le repère principal des contraintes est radial et tangentiel en tout point des bords libres.

Nous aboutissons aux mêmes conclusions en ce qui concerne la superposition des zones d'influence.

VIII -23. Conclusions.

Les valeurs des contraintes principales sont affectées, au contact d'une singularité, par la présence d'une seconde. L'allure de leur distribution n'est pas, cependant, fondamentalement modifiée.

Il en est de même, par conséquent, des distributions de déformations principales.

	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	1,87	0,58	1,57	0,52	3,43	1,0	5,29	1,55	7,16	2,07	9,02	2,57
0	1,89	0,56	1,57	0,52	3,41	0,99	5,28	1,44	7,17	1,89	9,05	2,33
0	1,87	0,28	1,56	0,53	3,30	0,87	5,13	1,15	6,99	1,42	8,85	1,69
0	1,77	0,03	1,54	0,53	3,12	0,71	4,84	0,99	6,59	1,16	8,35	0,87
0	1,61	-0,20	1,53	0,54	2,90	0,55	4,47	0,40	6,06	0,22	7,66	0,04
0	1,32	-0,36	1,52	0,54	2,58	0,44	3,85	0,13	5,15	-0,21	6,45	-0,58
0	0,99	-0,43	1,51	0,55	2,23	0,39	3,17	0,02	4,15	-0,40	5,13	-0,84
0	0,64	-0,40	1,49	0,55	1,88	0,42	2,45	0,10	3,06	-0,27	3,68	-0,67
0	0,29	-0,26	1,48	0,55	1,57	0,51	1,77	0,35	2,01	0,14	2,27	-0,09
0	0	0	1,48	0,56	1,44	0,57	1,39	0,58	1,33	0,58	1,28	0,59

TABLEAU VIII-1
Singularités adhérentes rigides
1er type de voisinage d = R

p ₀	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	2,07	0,62	1,68	0,47	3,75	1,02	5,81	1,64	7,88	2,34	9,95	3,11
0	2,10	0,53	1,68	0,47	3,72	0,97	5,80	1,52	7,89	2,13	9,98	2,79
0	2,05	0,29	1,65	0,49	3,56	0,85	5,58	1,17	7,62	1,51	9,66	1,88
0	1,88	0,03	1,62	0,50	3,33	0,69	5,20	0,78	7,10	0,85	9,00	0,92
0	1,64	-0,21	1,58	0,51	2,97	0,55	4,57	0,41	6,19	0,24	7,82	0,04
	1,40	-0,38	1,57	0,52	2,67	0,43	3,94	0,13	5,25	-0,22	6,53	-0,60
0	0,99	-0,45	1,54	0,53	2,24	0,39	3,18	0,05	4,15	-0,42	5,13	-0,90
0	0,63	-0,41	1,52	0,54	1,88	0,42	2,45	0,10	3,05	-0,29	3,68	-0,72
0	0,28	-0,27	1,51	0,54	1,58	0,51	1,77	0,36	2,01	0,15	2,27	-0,10
0	0	0	1,50	0,55	1,46	0,56	1,41	0,57	1,36	0,56	1,30	0,59

TABLEAU VIII-2
Singularités adhérentes rigides
1er type de voisinage $d = \frac{R}{2}$

Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
2,19	0,70	1,80	0,42	3,98	1,08	6,18	1,96	8,32	3,03	10,52	4,40
2,21	0,60	1,83	0,41	3,97	1,04	6,16	1,86	8,35	2,89	10,55	4,14
2,15	0,32	1,77	0,44	3,76	0,87	5,86	1,32	7,99	1,83	10,13	2,42
1,97	0,03	1,72	0,46	3,46	0,69	5,39	0,83	7,34	0,95	9,30	1,08
1,65	-0,22	1,65	0,49	3,03	0,55	4,63	0,43	6,25	0,25	7,90	0,05
1,36	-0,39	1,60	0,51	2,60	0,44	3,91	0,14	5,25	-0,23	6,55	-0,65
1,00	-0,46	1,58	0,51	2,28	0,39	3,24	0,02	4,24	-0,43	5,18	-0,94
0,65	-0,42	1,55	0,53	1,92	0,42	2,50	0,10	3,12	-0,29	3,76	-0,73
0,29	-0,27	1,53	0,54	1,60	0,51	1,79	0,36	2,04	0,15	2,30	-0,10
0	0	1,51	0,54	1,45	0,57	1,39	0,59	1,34	0,61	1,28	0,63

TABLEAU VIII-3

Singularités adhérentes rigides

1er type de voisinage $d = \frac{R}{4}$

	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	1,40	0,56	1,48	0,56	2,77	1,16	4,17	1,69	5,57	2,17	6,97	2,61
0	1,42	0,48	1,48	0,55	2,76	1,11	4,17	1,55	5,58	1,95	7,00	2,31
0	1,44	0,26	1,49	0,55	2,70	0,96	4,12	1,21	5,55	1,42	6,98	1,60
0	1,40	0,02	1,51	0,55	2,59	0,77	3,96	0,79	5,34	0,78	6,73	0,77
0	1,27	-0,19	1,52	0,54	2,41	0,59	3,65	0,40	4,90	0,21	6,16	0,03
0	1,08	-0,33	1,53	0,54	2,18	0,45	3,22	0,12	4,29	-0,17	5,36	-0,40
0	0,82	-0,39	1,54	0,53	1,66	0,40	2,67	0,02	3,47	-0,31	4,28	-0,56
0	0,53	-0,34	1,55	0,53	1,60	0,42	2,07	0,08	2,58	-0,19	3,09	-0,37
0	0,24	-0,22	1,57	0,52	1,33	0,49	1,49	0,28	1,69	0,09	1,90	-0,04
0	0	0	1,57	0,52	1,22	0,55	1,17	0,45	1,13	0,36	1,08	0,26

TABLEAU VIII-4

Singularités adhérentes rigides

2ème type de voisinage d = R

0	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	1,38	0,55	1,50	0,55	2,73	1,16	4,11	1,67	5,48	2,12	6,86	2,52
0	1,37	0,48	1,51	0,54	2,69	1,13	4,06	1,61	5,43	2,06	6,80	2,48
0	1,39	0,27	1,52	0,54	2,65	0,98	4,02	1,26	5,40	1,51	6,78	1,74
0	1,34	0,03	1,54	0,53	2,53	0,79	3,84	0,82	5,17	0,83	6,50	0,84
0	1,20	-0,20	1,57	0,52	2,35	0,60	3,51	0,42	4,70	0,23	5,89	0,04
0	1,02	-0,33	1,58	0,51	2,09	0,46	3,07	0,12	4,07	-0,18	5,07	-0,43
0	0,75	-0,37	1,62	0,50	1,76	0,40	2,46	0,02	3,19	-0,28	3,92	-0,46
0	0,47	-0,32	1,65	0,49	1,45	0,42	1,85	0,08	2,30	-0,16	2,75	-0,28
0	0,20	-0,21	1,68	0,47	1,17	0,51	1,28	0,27	1,45	0,08	1,62	-0,03
0	0	0	1,68	0,47	1,07	0,56	1,01	0,43	0,96	0,31	0,92	0,18

TABLEAU VIII-5

Singularités adhérentes rigides

2ème type de voisinage $d = \frac{R}{2}$

	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	1,35	0,57	1,51	0,54	2,70	1,19	4,05	1,75	5,42	2,09	6,74	2,78
0	1,35	0,48	1,53	0,54	2,66	1,13	4,01	1,61	5,35	2,04	6,70	2,45
0	1,35	0,27	1,55	0,53	2,59	0,98	3,92	1,25	5,25	1,49	6,60	1,70
0	1,28	0,03	1,58	0,51	2,47	0,79	3,72	0,82	5,00	0,86	6,28	0,90
0	1,16	-0,20	1,60	0,51	2,30	0,60	3,43	0,42	4,59	0,23	5,73	0,04
0	0,94	-0,34	1,65	0,49	2,02	0,47	2,92	0,13	3,84	-0,19	4,78	-0,48
0	0,65	-0,38	1,72	0,46	1,65	0,40	2,24	0,02	2,87	-0,29	3,52	-0,50
0	0,38	-0,32	1,77	0,44	1,30	0,42	1,59	0,08	1,94	-0,17	2,30	-0,31
0	0,14	-0,21	1,83	0,41	0,99	0,51	0,99	0,29	1,08	0,09	1,19	-0,04
0	0	0	1,80	0,42	0,82	0,62	0,79	0,49	0,75	0,36	0,67	0,24

TABLEAU VIII-6

Singularités adhérentes rigides

2ème type de voisinage $d = \frac{R}{4}$

0	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	1,32	0,58	1,53	0,54	2,67	1,21	3,99	1,75	5,31	2,33	6,64	3,26
0	1,32	0,49	1,55	0,53	2,64	1,15	3,95	1,72	5,25	2,10	6,58	2,78
0	1,33	0,28	1,57	0,52	2,61	1,01	3,91	1,35	5,23	1,70	6,56	2,01
0	1,31	0,03	1,58	0,51	2,55	0,81	3,84	0,92	5,12	1,00	6,42	1,11
0	1,23	-0,22	1,60	0,51	2,47	0,61	3,66	0,48	4,85	0,28	6,16	0,05
	1,12	-0,39	1,60	0,51	2,31	0,47	3,38	0,15	4,49	-0,26	5,54	-0,74
0	0,87	-0,47	1,58	0,51	2,09	0,41	2,90	0,02	3,75	-0,48	4,61	-1,06
0	0,59	-0,43	1,57	0,52	1,83	0,44	2,35	0,11	2,91	-0,32	3,49	-0,82
0	0,28	-0,27	1,55	0,53	1,58	0,52	1,76	0,38	2,00	0,16	2,25	-0,11
0	0	0	1,53	0,54	1,45	0,57	1,41	0,60	1,34	0,64	1,28	0,66

TABLEAU VIII-7

Singularités adhérentes rigides

3ème type de voisinage $d = R$

	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	1,26	0,56	1,58	0,51	2,58	1,20	3,83	1,73	5,09	2,21	6,35	2,64
0	1,26	0,49	1,60	0,51	2,55	1,15	3,80	1,61	5,06	2,11	6,31	2,59
0	1,27	0,27	1,62	0,50	2,53	1,00	3,76	1,31	5,02	1,60	6,29	1,88
0	1,26	0,03	1,65	0,49	2,51	0,80	3,73	0,89	4,97	0,95	6,22	1,01
0	1,21	-0,21	1,68	0,47	2,48	0,59	3,64	0,45	4,83	0,26	6,03	0,05
0	1,15	-0,39	1,68	0,47	2,30	0,45	3,44	0,14	4,55	-0,25	5,72	-0,70
0	0,97	-0,47	1,65	0,49	2,28	0,39	3,18	0,02	4,13	-0,46	5,10	-1,01
0	0,66	-0,43	1,62	0,50	1,98	0,41	2,56	0,11	3,19	-0,30	3,83	-0,79
0	0,31	-0,27	1,60	0,51	1,68	0,50	1,89	0,36	2,14	0,15	2,42	-0,10
0	0	0	1,58	0,51	1,52	0,55	1,48	0,58	1,43	0,61	1,37	0,63

TABLEAU VIII-8

Singularités adhérentes rigides

3ème type de voisinage $d = \frac{R}{2}$

	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	1,21	0,52	1,62	0,50	2,48	1,17	3,68	1,59	4,89	1,89	6,10	2,07
0	1,16	0,45	1,68	0,47	2,43	1,12	3,56	1,53	4,72	1,85	5,88	2,10
0	1,20	0,26	1,72	0,46	2,49	0,94	3,63	1,21	4,81	1,42	6,00	1,60
0	1,25	0,02	1,77	0,44	2,58	0,70	3,76	0,74	4,99	0,75	6,23	0,74
0	1,28	-0,19	1,80	0,43	2,60	0,53	3,81	0,36	5,05	0,19	6,36	0,03
0	1,23	-0,37	1,80	0,43	2,60	0,40	3,79	0,12	5,01	-0,18	6,30	-0,51
0	1,03	-0,46	1,77	0,44	2,39	0,36	3,35	0,02	4,36	-0,42	5,38	-0,93
0	0,71	-0,44	1,72	0,46	2,07	0,40	2,68	0,10	3,34	-0,30	4,03	-0,79
0	0,33	-0,28	1,68	0,47	1,76	0,48	2,00	0,35	2,28	0,15	2,59	-0,10
0	0	0	1,62	0,50	1,61	0,54	1,56	0,58	1,49	0,61	1,42	0,64

TABLEAU VIII-9

Singularités adhérentes rigides

3ème type de voisinage $d = \frac{R}{4}$

	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	0	-1,05	2,21	0	1,09	0	0	0	0	-1,08	0	-2,27
0	0	-0,82	2,22	0	1,23	0	0,26	0	0	-0,70	0	-1,74
0	0	-0,57	2,26	0	1,63	0	1,05	0	0,45	0	0	-0,15
0	0	0	2,30	0	2,26	0	2,28	0	2,28	0	2,29	0
0	0,77	0	2,35	0	3,07	0	3,84	0	4,62	0	5,39	0
0	1,59	0	2,38	0	3,92	0	5,51	0	7,10	0	8,69	0
0	2,40	0	2,41	0	4,75	0	7,15	0	9,55	0	11,95	0
0	3,06	0	2,45	0	5,48	0	8,53	0	11,59	0	14,65	0
0	3,52	0	2,50	0	6,02	0	9,55	0	13,07	0	16,60	0
0	3,66	0	2,50	0	6,17	0	9,83	0	13,49	0	17,15	0

TABLEAU VIII-10

Trous libres

1er type de voisinage d = R

o	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	0	-1,07	2,27	0	1,12	0	0	0	0	-1,11	0	-2,35
0	0	-0,91	2,32	0	1,28	0	0,28	0	0	-0,63	0	-1,54
0	0	-0,55	2,35	0	1,69	0	1,09	0	0,47	0	0	-0,13
0	0	0	2,41	0	2,36	0	2,39	0	2,40	0	2,41	0
0	0,83	0	2,50	0	3,21	0	4,05	0	4,89	0	5,72	0
0	1,74	0	2,55	0	4,20	0	5,94	0	7,68	0	9,42	0
0	2,74	0	2,69	0	5,35	0	8,00	0	10,80	0	13,53	0
0	3,62	0	2,78	0	6,34	0	9,94	0	13,55	0	17,16	0
0	4,37	0	2,89	0	7,22	0	11,57	0	15,93	0	20,30	0
0	4,56	0	2,89	0	7,41	0	11,95	0	16,00	0	21,05	0

TABLEAU VIII-11

Trous libres

1er type de voisinage $d = \frac{R}{2}$

0	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	0	-1,03	2,32	0	1,15	0	0	0	0	-0,99	0	-2,03
0	0	-0,91	2,38	0	1,31	0	0,28	0	0	-0,63	0	-1,56
0	0	-0,56	2,45	0	1,76	0	1,13	0	0,49	0	0	-0,13
0	0	0	2,55	0	2,48	0	2,50	0	2,52	0	2,53	0
0	0,86	0	2,62	0	3,34	0	4,21	0	5,09	0	5,97	0
0	1,90	0	2,78	0	4,52	0	6,39	0	8,28	0	10,17	0
0	3,13	0	3,02	0	6,04	0	9,14	0	12,26	0	15,39	0
0	4,41	0	3,18	0	7,49	0	11,87	0	16,26	0	20,66	0
0	5,69	0	3,39	0	9,03	0	14,77	0	20,53	0	26,31	0
0	5,70	0	3,28	0	9,13	0	14,67	0	20,60	0	26,60	0

TABLEAU VIII-12

Trous libres

1er type de voisinage $d = \frac{R}{4}$

	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	0	-1,03	2,50	0	0,64	0	0	0	0	-1,34	0	-2,75
0	0	-0,89	2,50	0	0,77	0	0,14	0	0	0	0	-1,91
0	0	-0,52	2,45	0	1,11	0	0,64	0	0,27	0	0	-0,14
0	0	0	2,41	0	1,64	0	1,54	0	1,51	0	1,48	0
0	0,62	0	2,38	0	2,20	0	2,60	0	3,04	0	3,50	0
0	1,10	0	2,35	0	2,97	0	4,02	0	5,11	0	6,20	0
0	1,68	0	2,30	0	3,58	0	5,23	0	6,91	0	8,58	0
0	2,17	0	2,26	0	4,09	0	6,26	0	8,43	0	10,60	0
0	2,52	0	2,22	0	4,45	0	6,96	0	9,48	0	11,99	0
0	2,64	0	2,21	0	4,58	0	7,22	0	9,86	0	12,51	0

TABLEAU VIII-13

Trous libres

2ème type de voisinage $d = R$

	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	0	-0,93	2,88	0	0,69	0	0	0	0	-1,12	0	-2,30
0	0	-0,79	2,88	0	0,79	0	0,11	0	0	-0,54	0	-1,21
0	0	-0,47	2,78	0	1,09	0	0,54	0	0,21	0	0	-0,08
0	0	0	2,69	0	1,61	0	1,38	0	1,30	0	1,26	0
0	0,48	0	2,55	0	2,31	0	2,67	0	3,11	0	3,56	0
0	1,21	0	2,50	0	3,18	0	4,38	0	5,62	0	6,72	0
0	1,75	0	2,41	0	3,73	0	5,44	0	7,17	0	8,92	0
0	2,26	0	2,35	0	4,24	0	6,47	0	8,67	0	10,98	0
0	2,59	0	2,32	0	4,57	0	7,14	0	9,73	0	12,32	0
0	2,55	0	2,27	0	4,49	0	7,03	0	9,58	0	12,13	0

TABLEAU VIII-14

Trous libres

2ème type de voisinage $d = \frac{R}{2}$

0	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	0	-0,70	3,28	0	0,68	0	0	0	0	-0,31	0	-0,80
0	0	-0,53	3,39	0	0,79	0	0,09	0	0	0	0,40	0
0	0	-0,32	3,18	0	1,15	0	0,53	0	0,19	0	0,02	0
0	0	0	3,02	0	1,73	0	1,42	0	1,29	0	1,23	0
0	0,49	0	2,78	0	2,49	0	2,83	0	3,27	0	3,73	0
0	1,15	0	2,62	0	3,18	0	4,30	0	5,44	0	6,80	0
0	1,80	0	2,55	0	3,80	0	5,60	0	7,34	0	9,10	0
0	2,19	0	2,45	0	4,23	0	6,37	0	8,54	0	10,74	0
0	2,55	0	2,38	0	4,56	0	7,07	0	9,61	0	12,15	0
0	2,70	0	2,32	0	4,68	0	7,36	0	10,06	0	12,76	0

TABLEAU VIII-15

Trous libres

2ème type de voisinage $d = \frac{R}{4}$

0	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	0	-1,03	2,37	0	1,16	0	0	0	0	-0,99	0	-1,84
0	0	-0,87	2,45	0	1,33	0	0,29	0	0	-0,54	0	-1,37
0	0	-0,51	2,00	0	1,75	0	1,13	0	0,49	0	0	-0,09
0	0	0	2,55	0	2,39	0	2,41	0	2,44	0	2,44	0
0	0,80	0	2,62	0	3,13	0	3,91	0	4,69	0	5,48	0
0	1,55	0	2,62	0	3,77	0	5,30	0	6,83	0	8,35	0
0	2,22	0	2,55	0	4,39	0	6,56	0	8,76	0	10,96	0
0	2,61	0	2,50	0	4,72	0	7,28	0	9,87	0	12,47	0
0	2,74	0	2,45	0	4,81	0	7,51	0	10,24	0	12,97	0
0	2,76	0	2,41	0	4,88	0	7,73	0	10,45	0	12,99	0

TABLEAU VIII-16

Trous libres

3ème type de voisinage d = R

	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	0	-1,06	2,55	0	1,24	0	0	0	0	-1,00	0	-2,13
0	0	-0,93	2,62	0	1,41	0	0,31	0	0	-0,57	0	-1,52
0	0	-0,54	2,69	0	1,89	0	1,21	0	0,53	0	0	-0,11
0	0	0	2,78	0	2,57	0	2,58	0	2,59	0	2,60	0
0	0,83	0	2,89	0	3,38	0	4,17	0	4,99	0	5,82	0
	1,52	0	2,89	0	3,97	0	5,40	0	6,92	0	8,42	0
0	1,93	0	2,78	0	4,33	0	6,15	0	8,04	0	9,95	0
0	2,22	0	2,69	0	4,56	0	6,68	0	8,87	0	11,07	0
0	2,35	0	2,62	0	4,57	0	6,83	0	9,15	0	11,48	0
0	2,40	0	2,55	0	4,50	0	6,80	0	9,21	0	11,76	0

TABLEAU VIII-17

Trous libres

3ème type de voisinage $d = \frac{R}{2}$

0°	Monoaxial		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=1$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=2$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=3$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=4$		Biaxial $\frac{p_1}{p_2}=5$	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
0	0	-1,16	2,69	0	1,33	0	0	0	0	-1,22	0	-2,76
0	0	-0,99	2,89	0	1,57	0	0,34	0	0	-0,65	0	-1,75
0	0	-0,56	3,02	0	2,09	0	1,33	0	0,58	0	0	-0,11
0	0	0	3,18	0	2,87	0	2,82	0	2,80	0	2,80	0
0	0,83	0	3,30	0	3,71	0	4,36	0	5,20	0	5,99	0
0	1,35	0	3,30	0	4,22	0	5,47	0	6,80	0	8,20	0
0	1,70	0	3,18	0	4,42	0	5,96	0	7,59	0	9,25	0
0	1,99	0	3,02	0	4,60	0	6,45	0	8,38	0	10,33	0
0	1,86	0	2,89	0	4,44	0	6,13	0	7,98	0	9,73	0
0	2,20	0	2,69	0	4,50	0	6,61	0	8,80	0	10,92	0

TABLEAU VIII-18

Trous libres

3ème type de voisinage $d = \frac{R}{4}$

Nous pouvons en conclure que le critère d'extension maximale qui régit le comportement du modèle à singularité unique, joue le même rôle dans le comportement du modèle à deux singularités.

Dans le cas d'un nombre quelconque de singularités, nous pouvons supposer qu'il en sera encore de même puisque la détermination des contraintes et déformations principales par la théorie des facteurs d'influence est associative et que la distribution des σ_1 , σ_2 , ε_1 et ε_2 n'est modifiée à aucun stade du calcul.

VIII -3. COMPORTEMENT A LA LIMITE DE REVERSIBILITE DANS CHAQUE CAS DE VOISINAGE. APPLICATION AU CAS DU MATERIAU REEL.

VIII -31. Allure du domaine de réversibilité.

Les valeurs des extensions maximales sont regroupées dans les tableaux ci-après.

L'allure des convexes limites de réversibilité est indiquée sur les figures VIII-1 à VIII-6. Elle est semblable, dans chaque cas, à celle du convexe obtenu pour le modèle à singularité unique.

VIII -311. Cas de granulats rigides adhérents.

Chargement Voisinage	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 1$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 2$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 3$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 4$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 5$	Monoaxial
$d = R$	-0,84	-1,80	-2,70	-3,70	-4,60	-0,97
$d = R/2$	-0,86	-1,90	-3,0	-4,10	-5,23	-1,08
$d = R/4$	-0,89	-2,0	-3,25	-4,50	-5,97	-1,25

Tableau VIII-19

$E\varepsilon_{\max}$ - 1er type de voisinage

Chargement Voisinage	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 1$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 2$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 3$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 4$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 5$	Monoaxial
d = R	-0,84	-1,57	-2,34	-3,10	-3,80	-0,77
d = R/2	-0,86	-1,56	-2,31	-3,04	-3,75	-0,77
d = R/4	-0,89	-1,56	-2,32	-3,0	-3,80	-0,76

Tableau VIII-20

$E\epsilon_{\max}$ - 2ème type de voisinage

Chargement Voisinage	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 1$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 2$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 3$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 4$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 5$	Monoaxial
d = R	-0,84	-1,55	-2,30	-3,10	-3,96	-0,84
d = R/2	-0,86	-1,51	-2,20	-2,90	-3,60	-0,86
d = R/4	-0,89	-1,50	-2,10	-2,70	-3,30	-0,87

Tableau VIII-21

$E\epsilon_{\max}$ - 3ème type de voisinage

VIII -312. Cas de trous libres.

Chargement Voisinage	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 1$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 2$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 3$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 4$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 5$	Monoaxial
d = R	-1,0	-2,50	-3,90	-5,40	-6,90	-1,50
d = R/2	-1,15	-2,90	-4,80	-6,60	-8,40	-1,80
d = R/4	-1,36	-3,70	-6,0	-8,30	-10,60	-2,30

Tableau VIII-22

$E\epsilon_{\max}$ - 1er type de voisinage

Chargement Voisinage	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 1$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 2$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 3$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 4$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 5$	Monoaxial
d = R	-1,0	-1,83	-2,88	-3,94	-5,0	-1,06
d = R/2	-1,15	-1,83	-2,86	-3,90	-4,90	-1,03
d = R/4	-1,36	-1,87	-2,94	-4,02	-5,10	-1,08

Tableau VIII-23

$E\epsilon_{\max}$ - 2ème type de voisinage

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE MODELE A DEUX SINGULARITES ADHERENTES

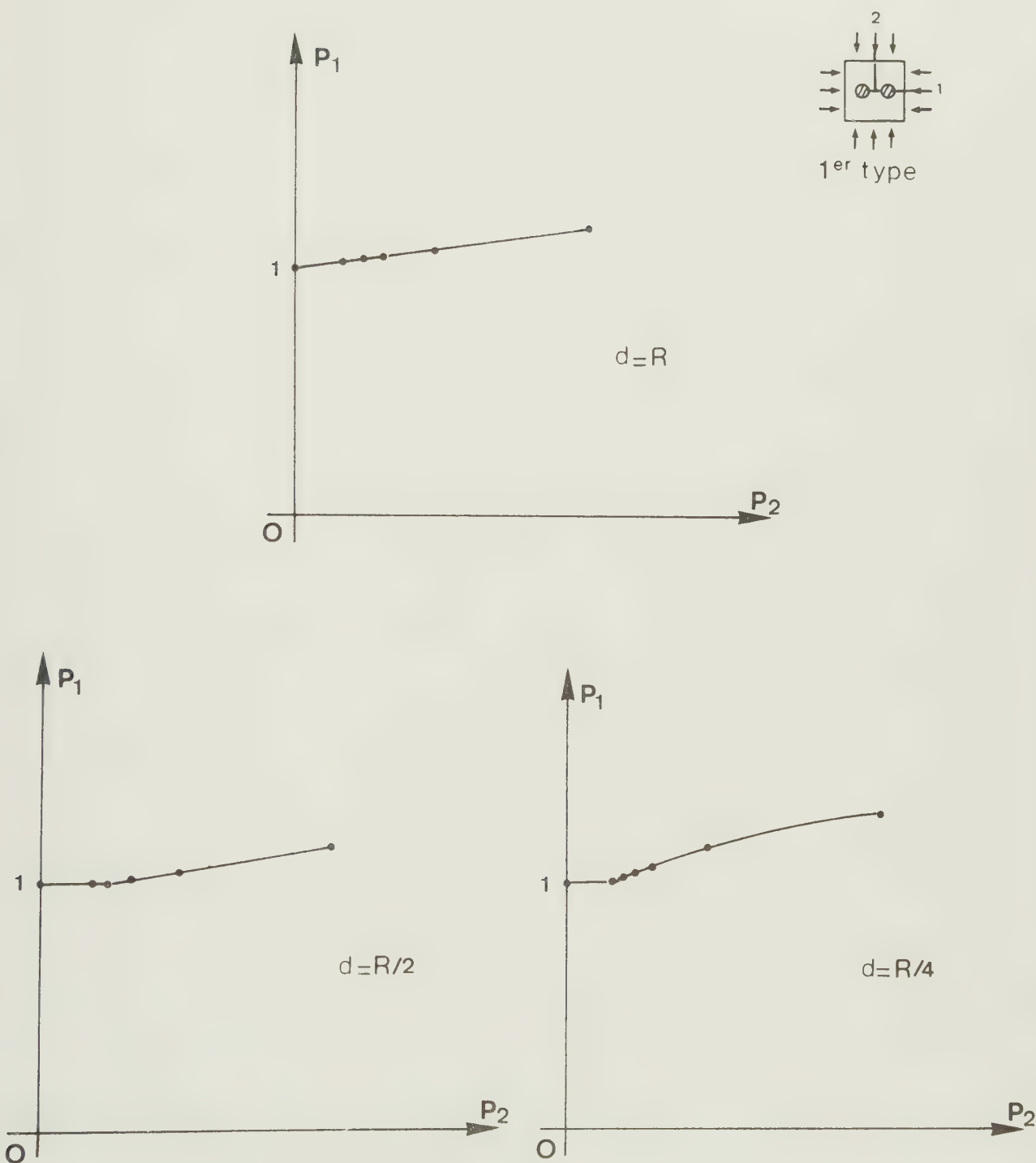


FIG. VIII-1

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE
MODELE A DEUX SINGULARITES ADHERENTES

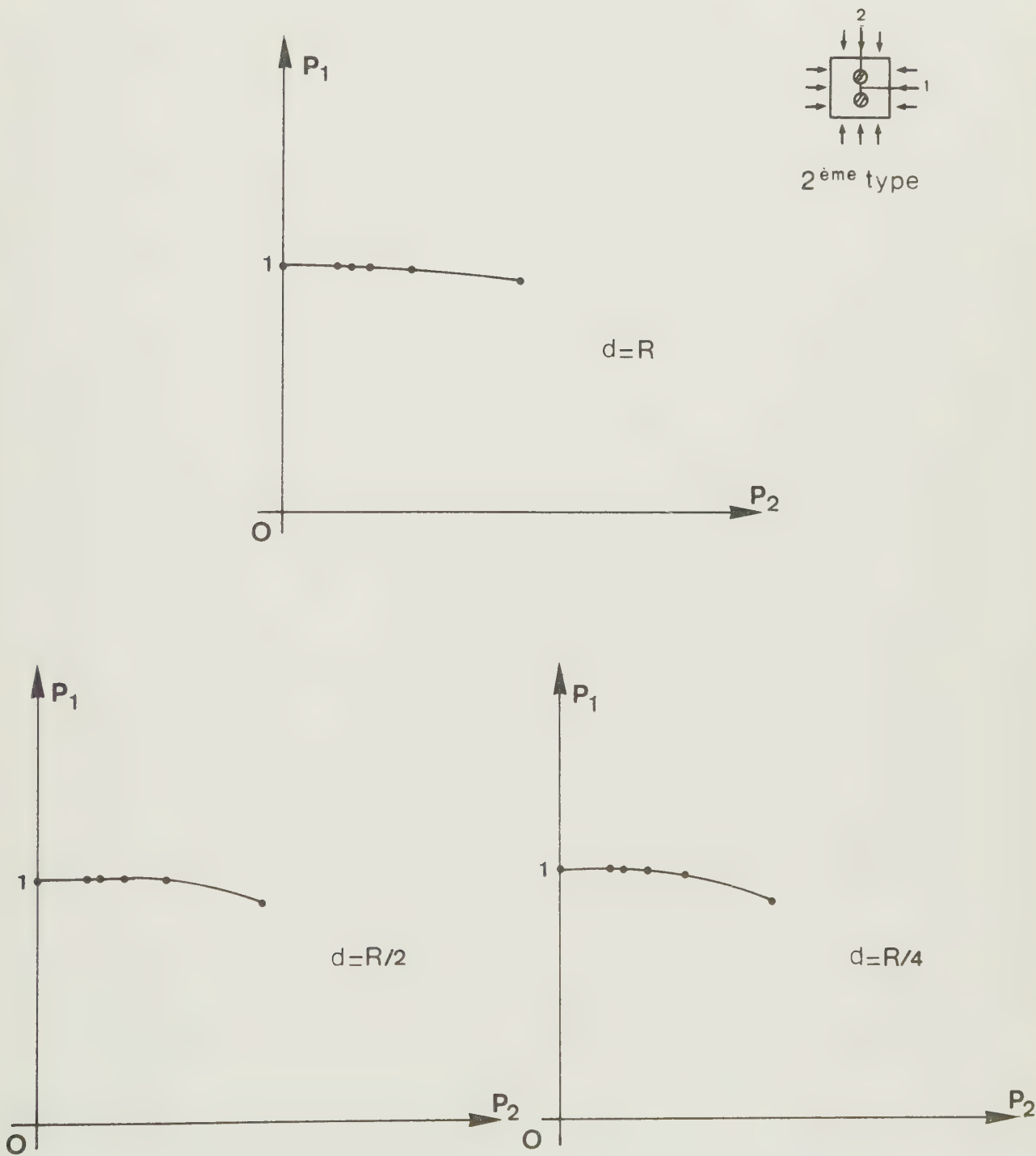


FIG.VIII - 2

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE MODELE A DEUX SINGULARITES ADHERENTES

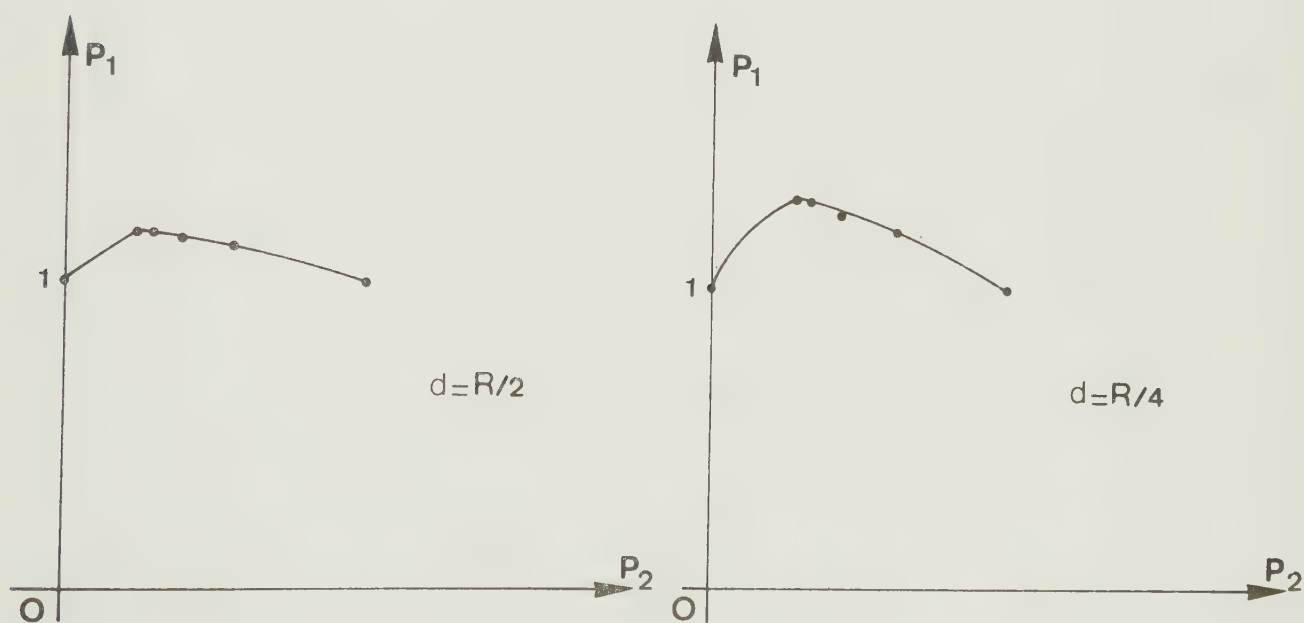
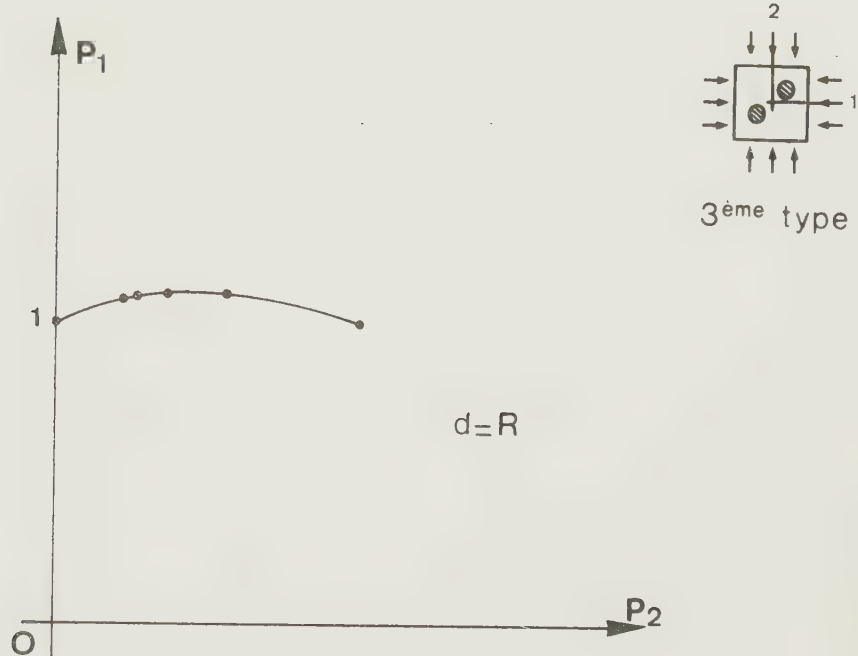


FIG. VIII - 3

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE
MODELE A DEUX TROUS LIBRES

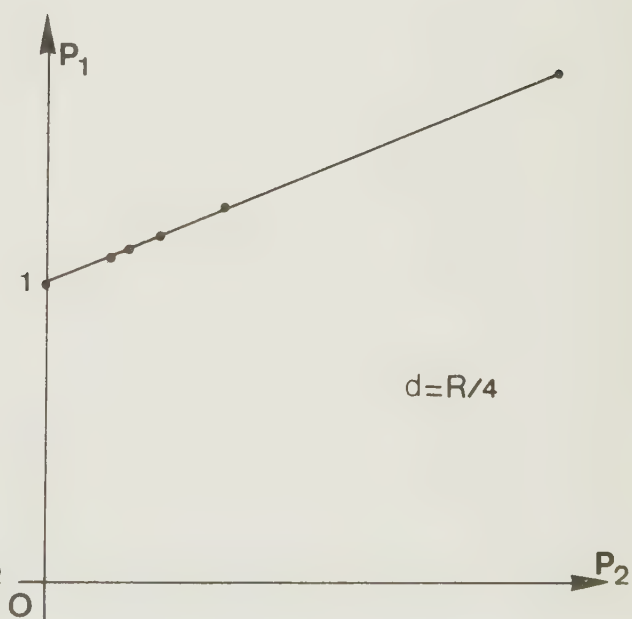
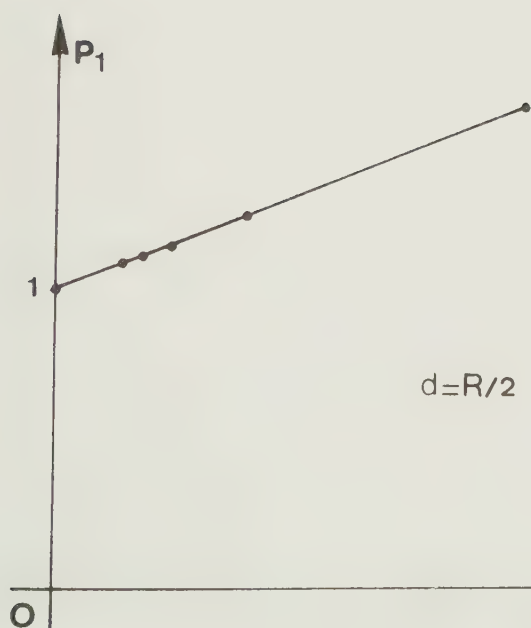
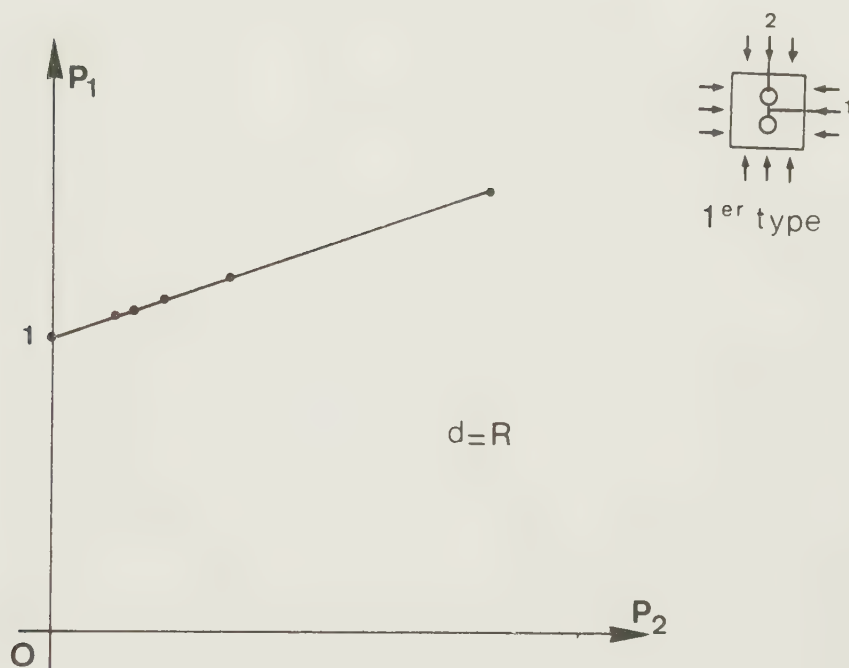


FIG. VIII - 4

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE
MODELE A DEUX TROUS LIBRES

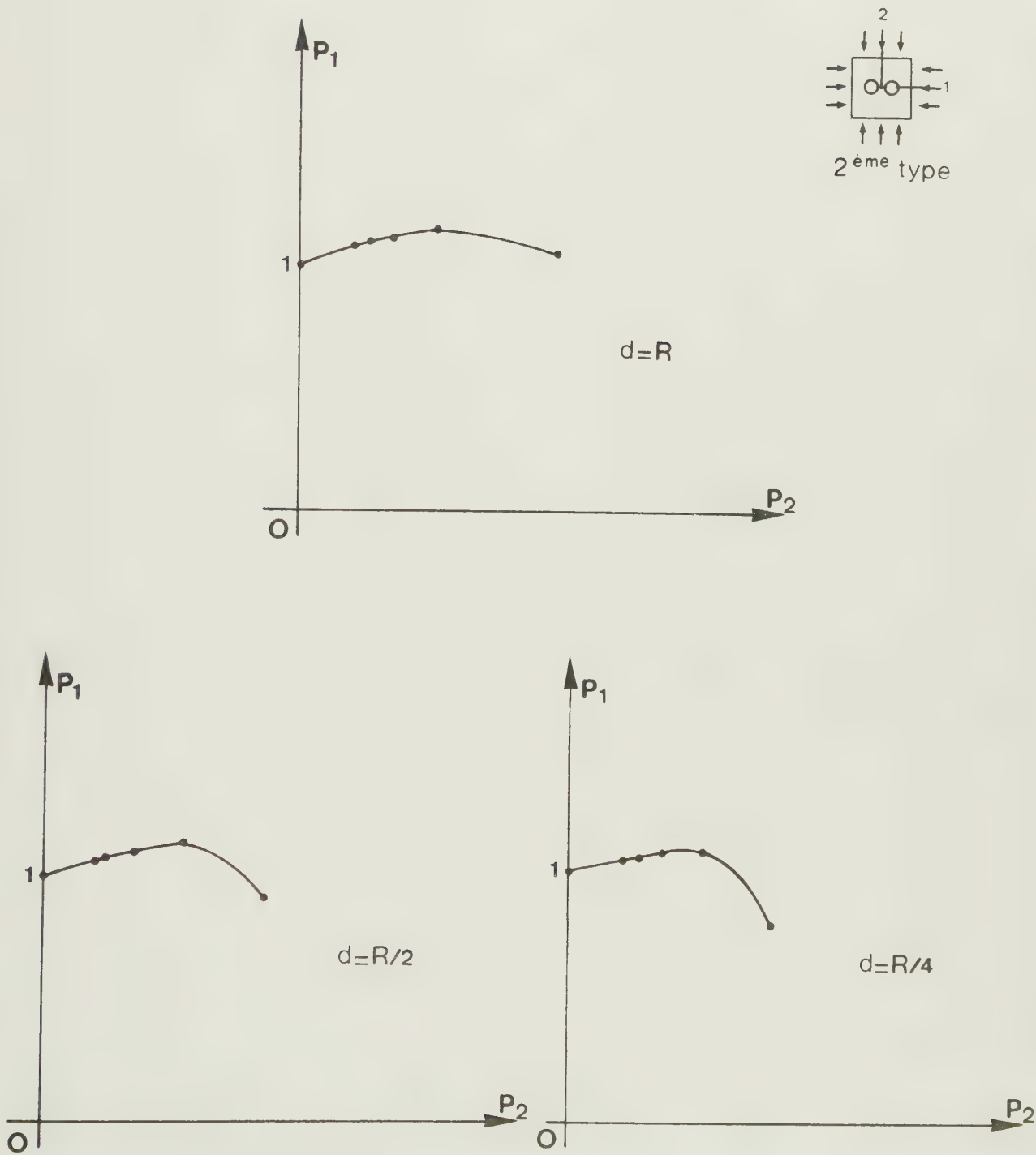


FIG. VIII - 5

TRACE DE LA SURFACE D'ETAT LIMITE
MODELE A DEUX TROUS LIBRES

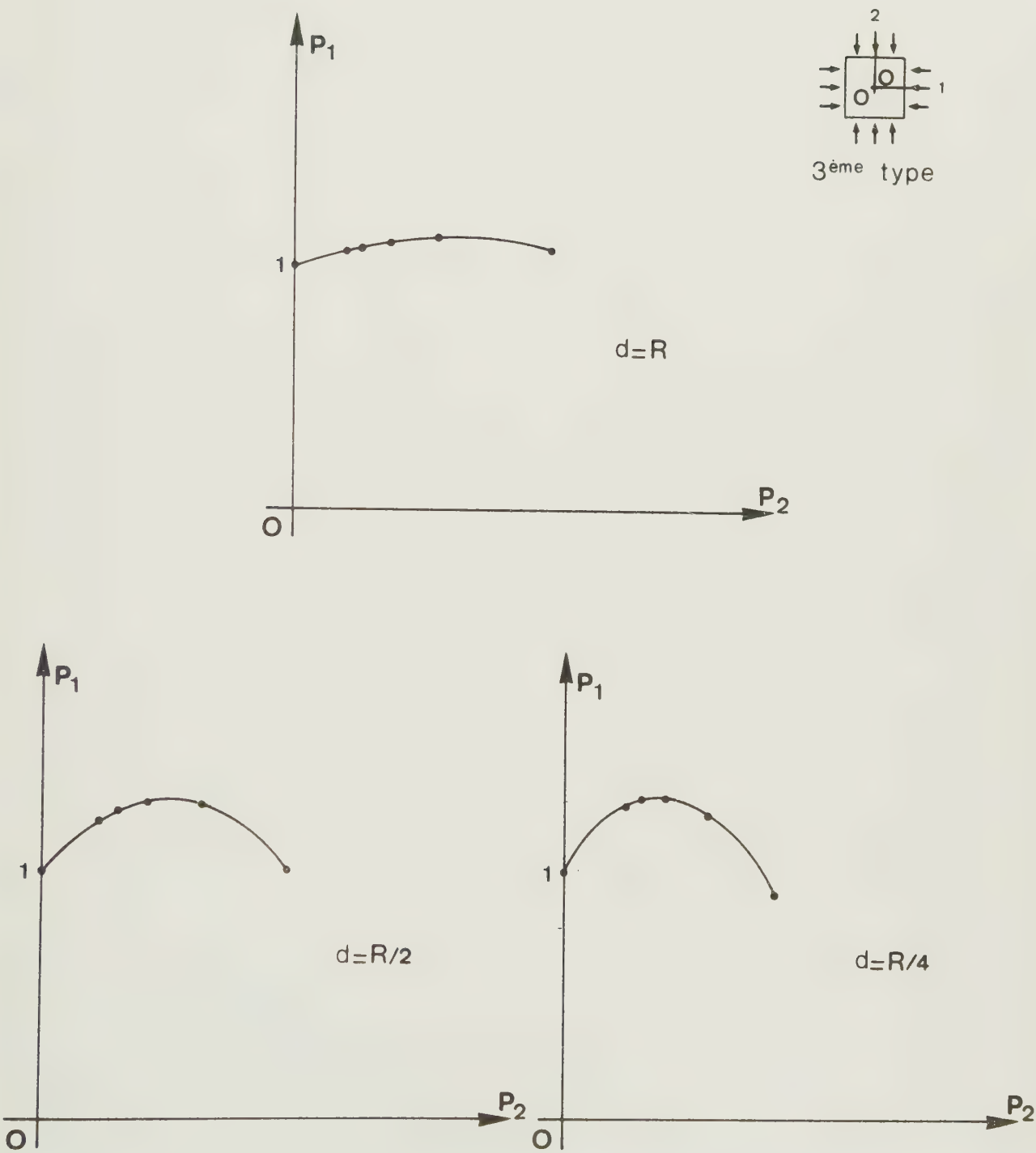


FIG. VIII - 6

VARIATIONS DES CONTRAINTES PRINCIPALES
SUR LE CONTOUR DE CHAQUE SINGULARITE
DANS LA ZONE D'INFLUENCE MUTUELLE

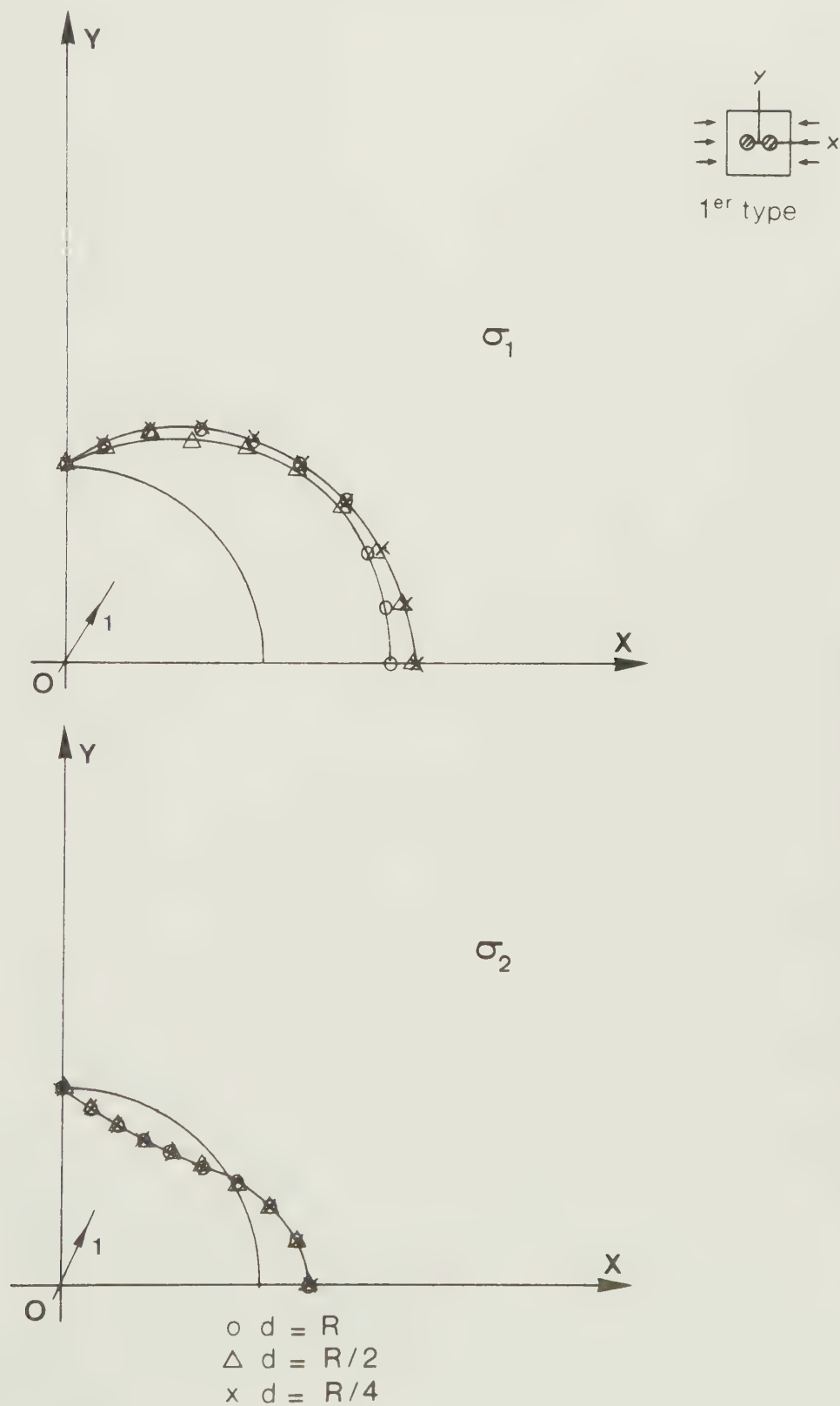


FIG. VIII -7

VARIATIONS DES CONTRAINTES PRINCIPALES
SUR LE CONTOUR DE CHAQUE SINGULARITE
DANS LA ZONE D'INFLUENCE MUTUELLE

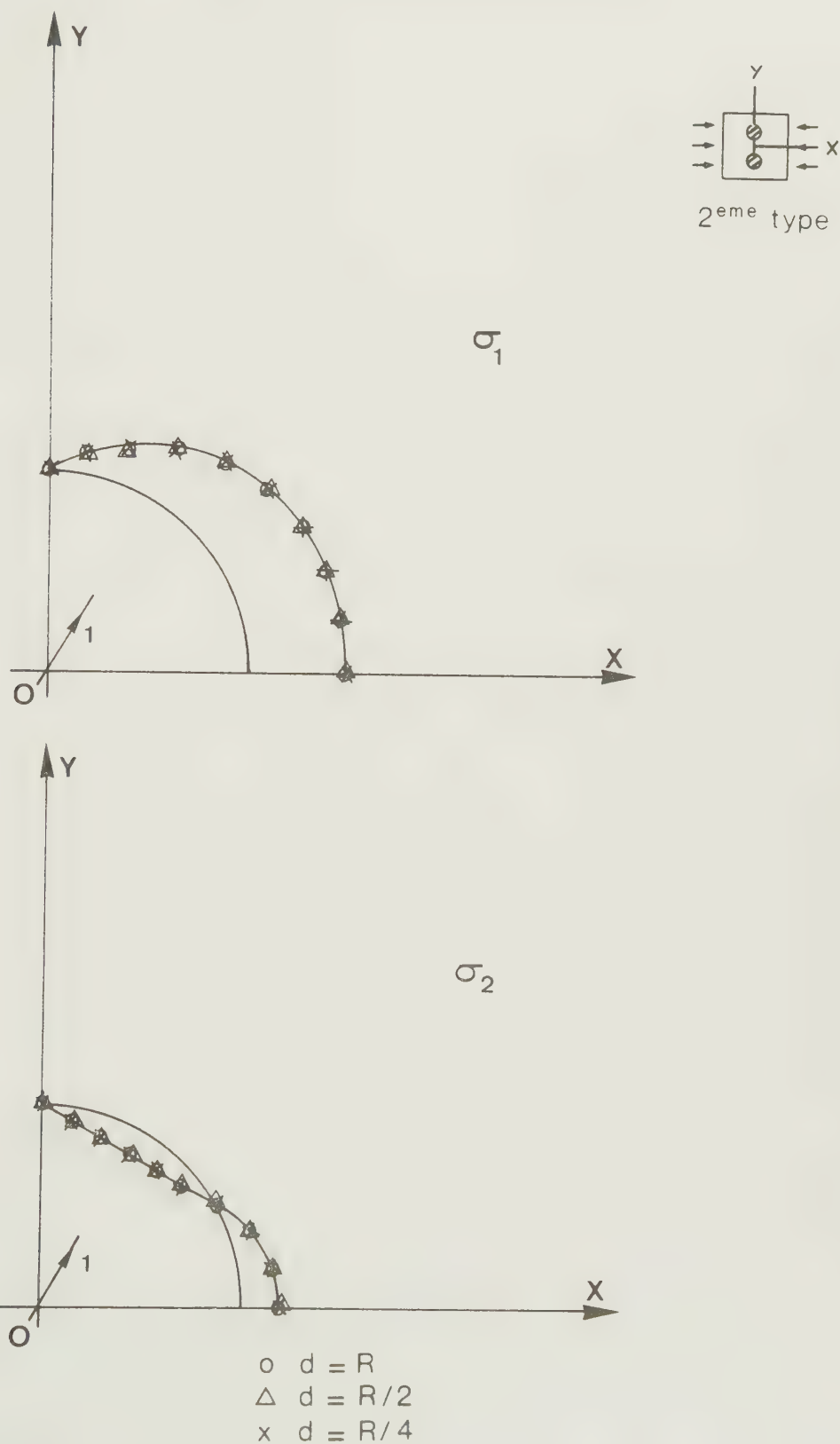


FIG. VIII-8

VARIATIONS DES CONTRAINTES PRINCIPALES
SUR LE CONTOUR DE CHAQUE SINGULARITE
DANS LA ZONE D'INFLUENCE MUTUELLE

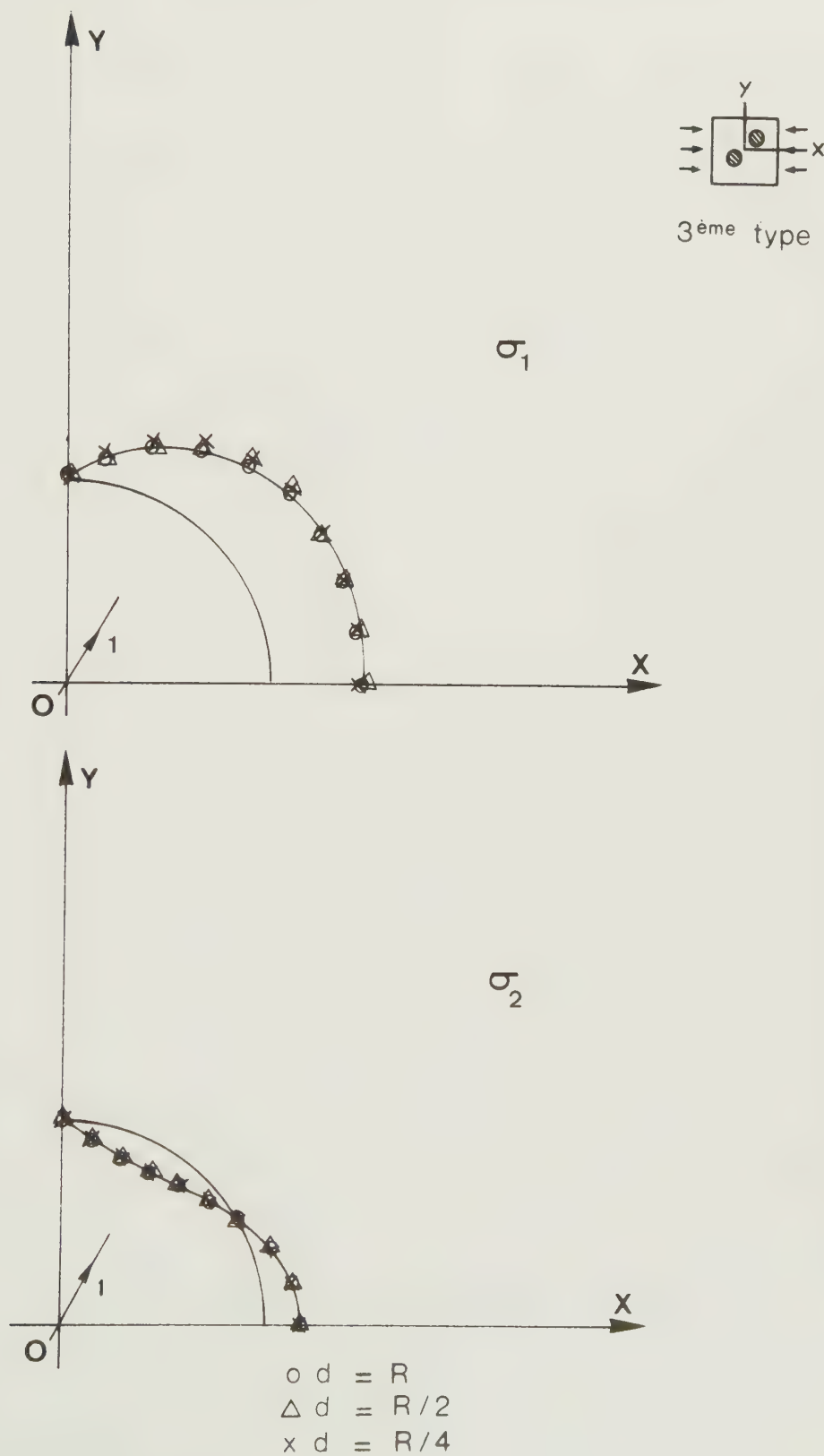


FIG. VIII-9

VARIATIONS DES CONTRAINTES PRINCIPALES
SUR LE CONTOUR DE CHAQUE TROU LIBRE
DANS LA ZONE D'INFLUENCE MUTUELLE

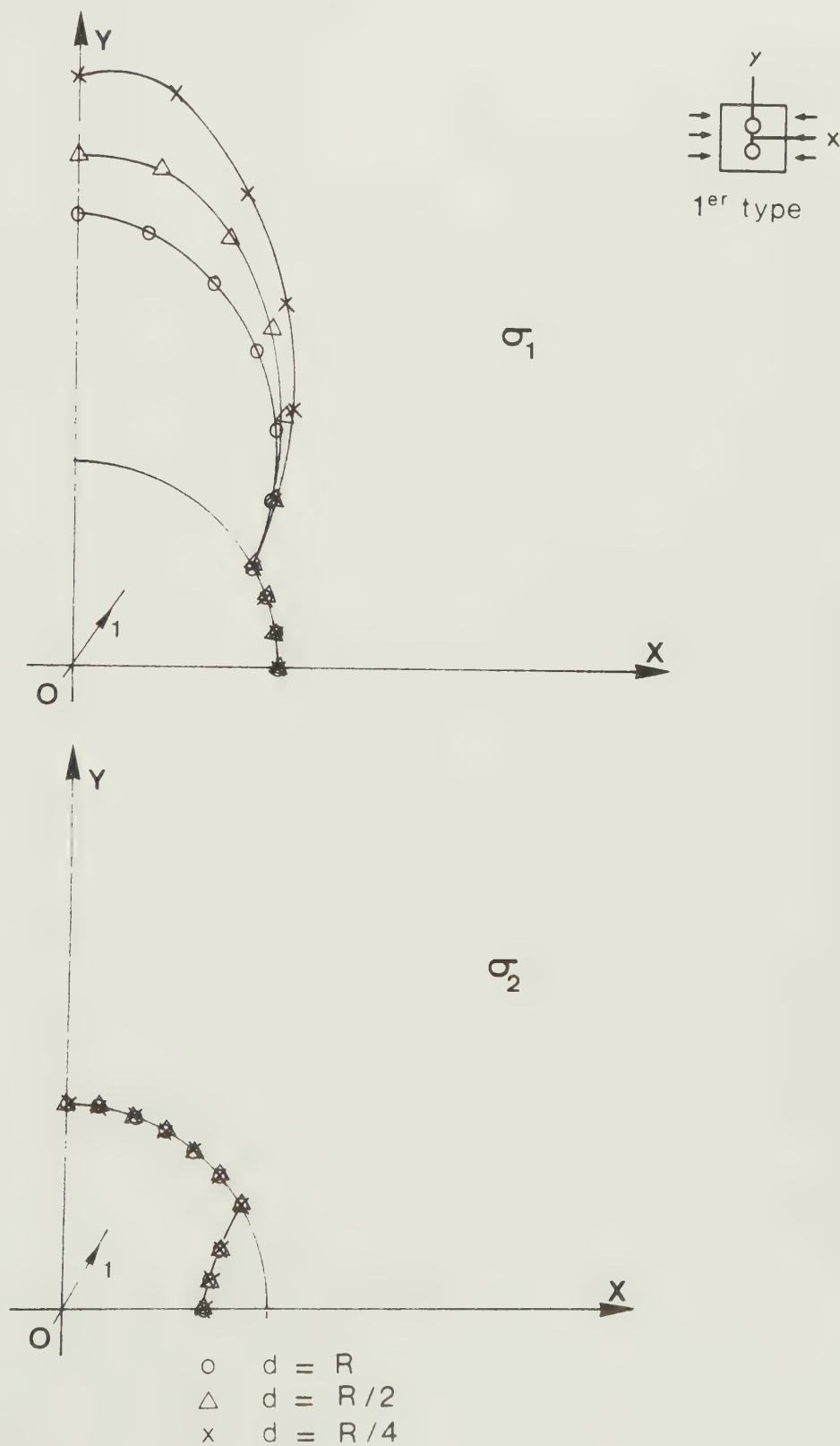


FIG. VIII - 10

VARIATIONS DES CONTRAINTES PRINCIPALES
SUR LE CONTOUR DE CHAQUE TROU LIBRE
DANS LA ZONE D'INFLUENCE MUTUELLE

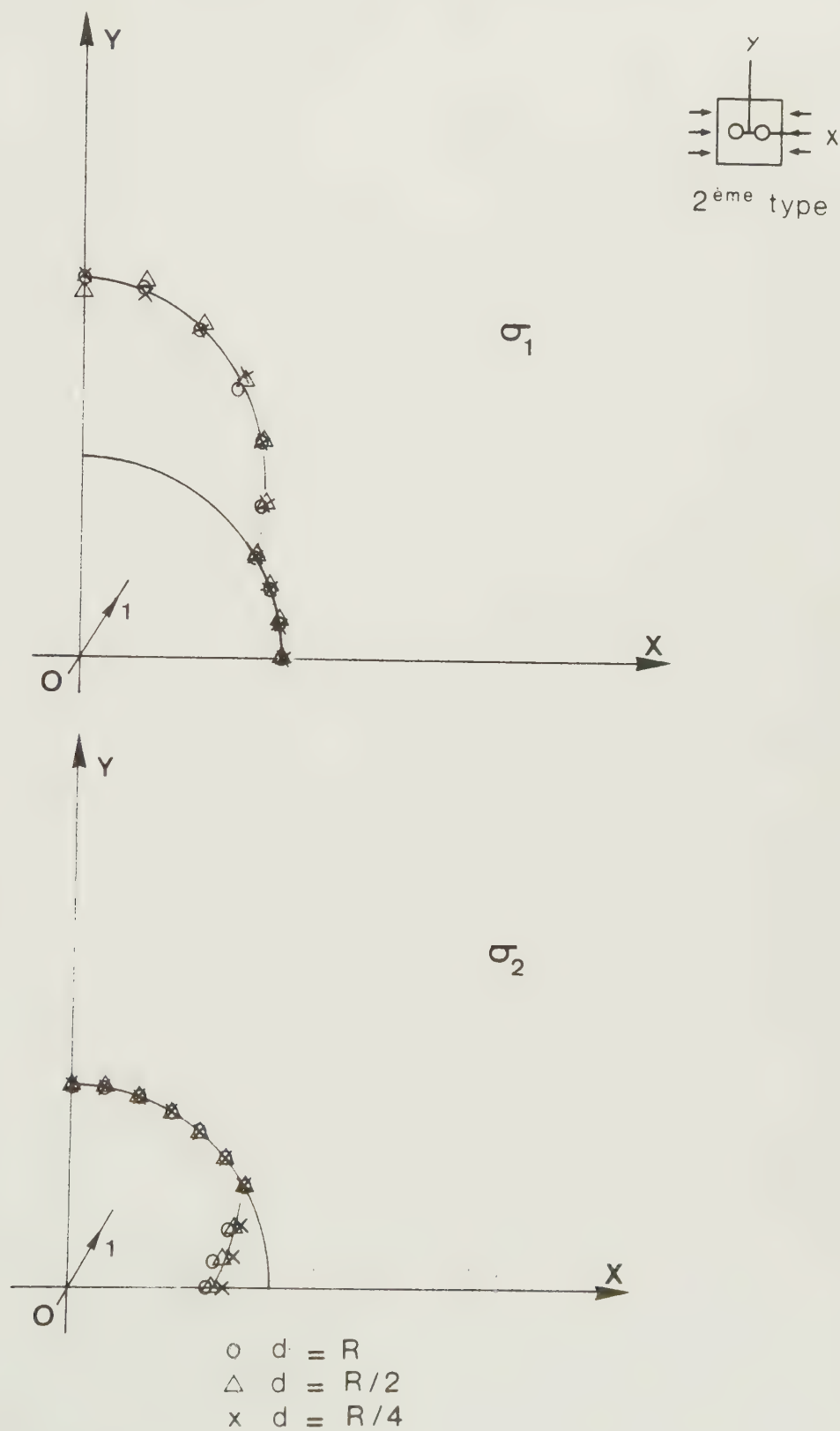


FIG. VIII - 11

VARIATIONS DES CONTRAINTES PRINCIPALES
SUR LE CONTOUR DE CHAQUE TROU LIBRE
DANS LA ZONE D'INFLUENCE MUTUELLE

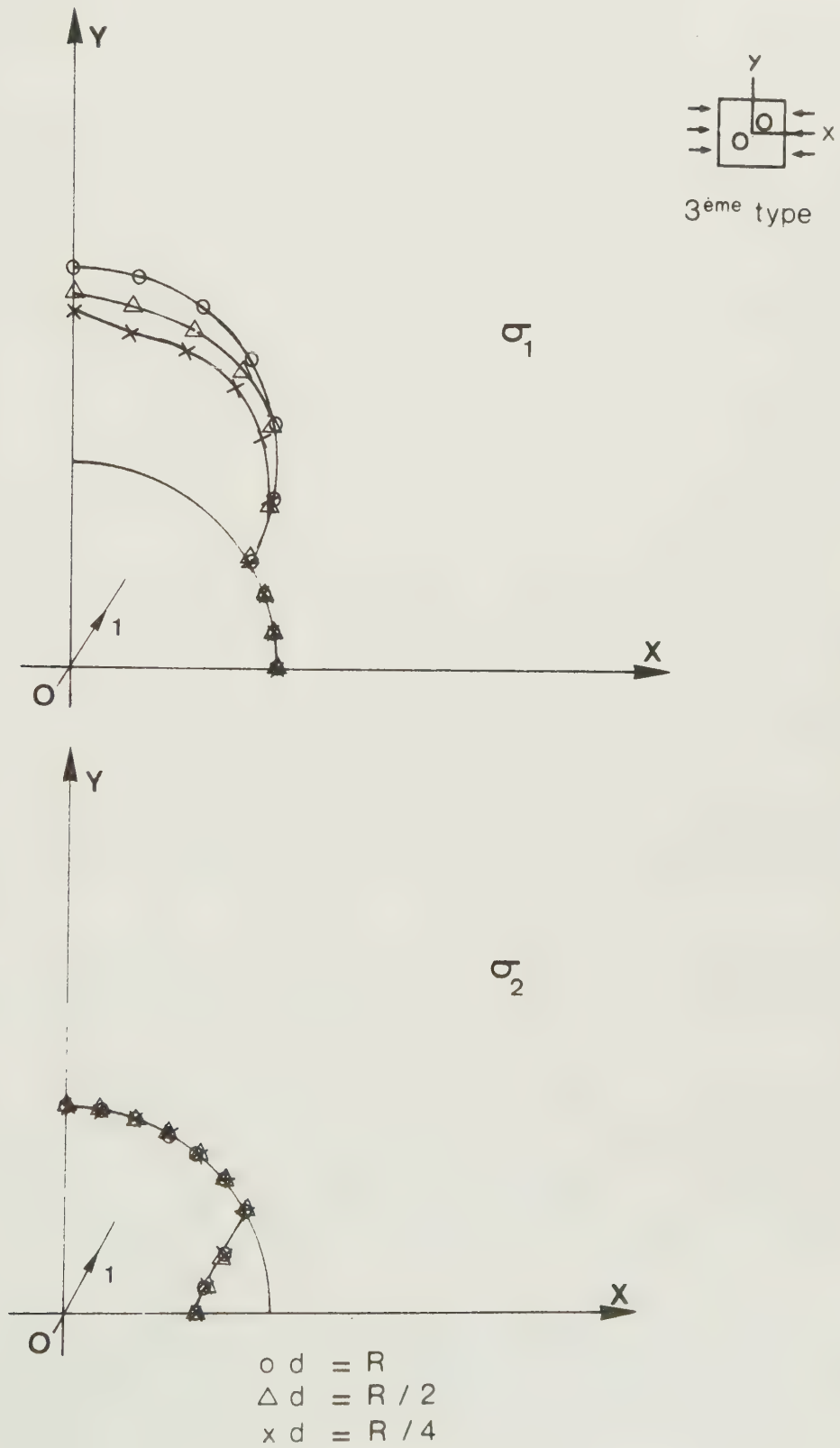


FIG. VIII - 12

Chargement Voisinage	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 1$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 2$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 3$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 4$	Biaxial $\frac{p_1}{p_2} = 5$	Monoaxial
$d = R$	-1,05	-1,95	-3,10	-4,20	-5,20	-1,10
$d = R/2$	-1,15	-1,83	-2,70	-3,70	-4,70	-1,16
$d = R/4$	-1,32	-1,84	-2,60	-3,50	-4,40	-0,96

Tableau VIII-24

$E\epsilon_{\max}$ - 3ème type de voisinage

VIII -32. Allure des figures de fissuration.

VIII -321. Sollicitation de compression monoaxiale.

L'origine des microfissures ne sera pas modifiée par la présence de plusieurs singularités puisqu'elle ne dépend que de la position géométrique du maximum de la déformation d'extension au contour des singularités.

La propagation de la fissuration sera par contre modifiée puisque les cônes, ou zones de frettage par sollicitation biaxiale locale, se manifestent au voisinage de chaque granulat.

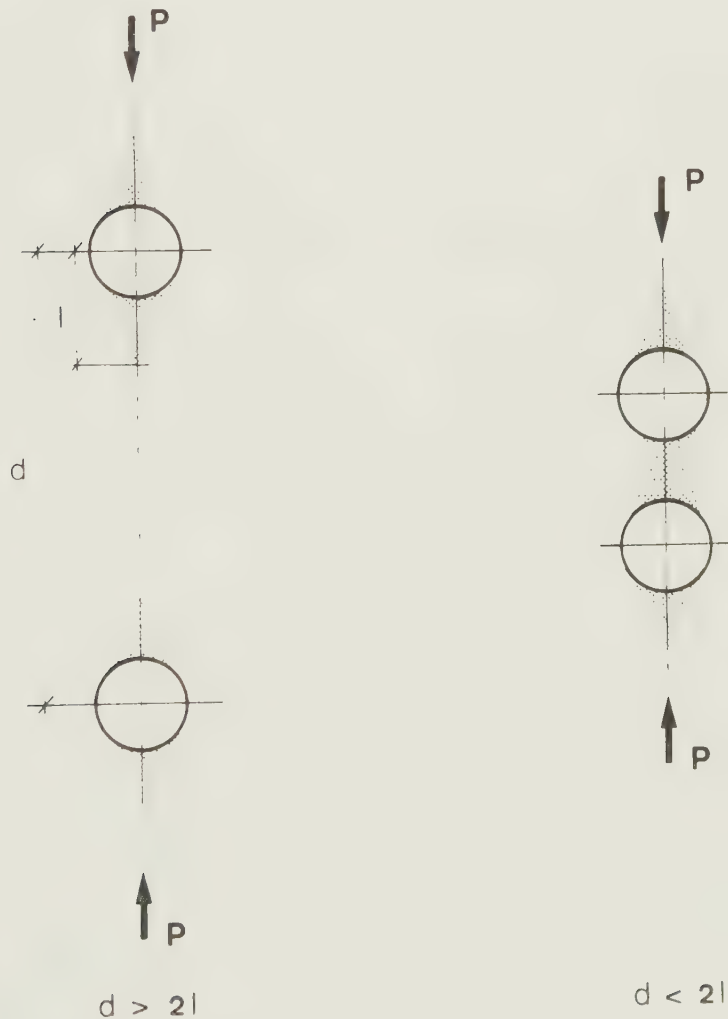
Lorsque ces derniers sont suffisamment éloignés les uns des autres pour que leurs cônes respectifs ne se chevauchent pas, le cheminement de la fissuration sera le même que s'ils étaient isolés. Dans le cas contraire, les zones de frettage se recouvrent et la fissure se propage en suivant la frontière de la réunion géométrique des zones renforcées, selon le mécanisme décrit pour le modèle à singularité unique.

Les figures de fissuration ainsi obtenues sont tout à fait semblables à celles qu'on observe dans le matériau réel où les surfaces de rupture locale épousent partiellement le contour des granulats. On retrouve des chaînes de granulats solidarisés par du mortier encore

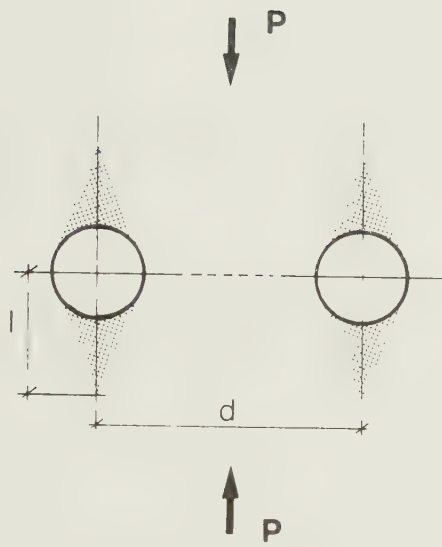
adhérent par calottes polaires de surface variable, formant ainsi un squelette résistant jusqu'à la ruine complète de la pièce (27).

Les figures ci-après illustrent le comportement de chaque type de voisinage, pour deux granulats rigides adhérents dans le cas d'une sollicitation de compression monoaxiale appliquée à un béton.

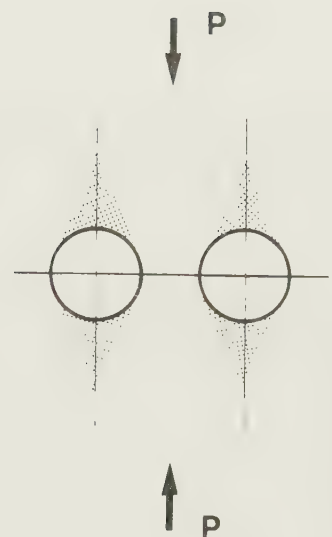
L'assemblage de telles figures pour un grand nombre de singularités peut expliquer que l'observation de certaines fissures, disposées en biais par rapport à la sollicitation, ait pu amener la plupart des chercheurs à des conclusions erronées, expliquant les mécanismes de fissuration et de rupture par des glissements locaux.



1^{er} type de voisinage

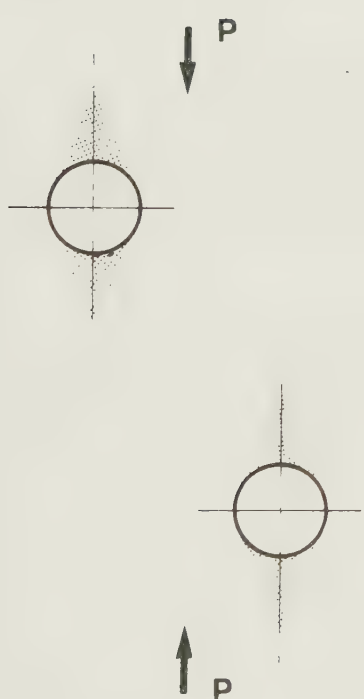


$d > 2l$

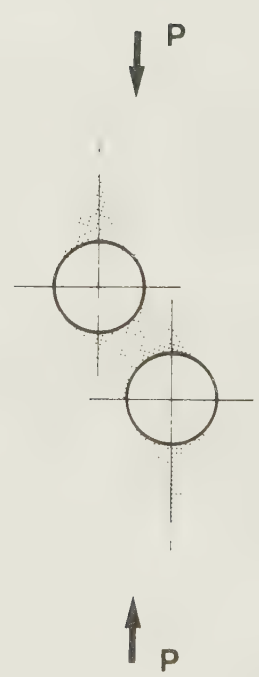


$d < 2l$

2^{ème} type de voisinage



$d > 2l$



$d < 2l$

3^{ème} type de voisinage

VIII -322. Sollicitation de compression biaxiale.

Dans le cas de la compression biaxiale, les déformations d'extension maximale sont perpendiculaires au plan de la sollicitation. Les microfissures qui en résultent s'ouvrent dans l'épaisseur des échantillons.

Au voisinage des granulats les zones de frettage sont en forme de couronne, ce qui explique la présence des halos de mortier adhérent, observés par VILE, lors de la rupture du béton en compression biaxiale.

VIII -4. CONCLUSIONS.

L'ensemble des observations précédentes montre bien que les conditions de voisinage entre singularités influent davantage sur les valeurs des contraintes et des déformations principales le long de l'interface pâte-granat que sur l'allure de leur distribution le long de cet interface.

Il en résulte que les valeurs des résistances des mortiers et bétons à la rupture sous charges extérieures sont très affectées par la nature, les dimensions, le nombre et l'arrangement géométrique des granulats, ainsi que par la nature de leur liaison avec la pâte, ce qui confirme les observations faites sur ce sujet par la plupart des auteurs.

En ce qui concerne les premiers désordres irréversibles, c'est le critère d'extension maximale de BRANDENBERGER qui régit leur apparition, ce qui justifie la similitude de comportement que nous avons, à plusieurs reprises, remarquée entre le matériau réel et la schématisation très élémentaire que nous en avons donnée.

CONCLUSIONS

=====

Le but essentiel de notre travail était de préciser l'influence des distributions locales de contraintes et de déformations sur le comportement mécanique des matériaux granulaires cohérents.

Les difficultés que présente ce problème nous ont conduit à substituer au matériau réel un modèle théorique simple, pour entreprendre ensuite des études plus complètes sur des modèles de plus en plus complexes et revenir ainsi au matériau composite initial. Nous avons pu alors vérifier la validité de nos hypothèses et de la schématisation choisie.

Nous avons admis, ainsi qu'on le fait généralement pour les mortiers et bétons, que les matériaux granulaires cohérents peuvent être considérés, en première approximation, comme des matériaux composites à deux phases homogènes : le liant et les éléments fins, d'une part, les grosses singularités, d'autre part.

La première partie de notre travail a été consacrée à l'analyse des champs de déformations et de contraintes engendrés dans une plaque élastique par une singularité circulaire unique. C'est le cas élémentaire de la représentation schématique étudiée.

Nous avons fait varier régulièrement les caractéristiques mécaniques respectives de l'inclusion et de la matrice entre deux cas extrêmes : celui du trou libre et celui de l'inclusion rigide.

Nous avons distingué deux types de liaison entre la singularité et la plaque selon qu'il y a adhérence, ou non, entre ces deux phases.

Nous avons proposé, dans chaque cas, une solution théorique au problème de la détermination des états de contraintes dans le modèle, en utilisant les équations de l'élasticité linéaire et la variable complexe.

L'expérience nous a permis de vérifier la validité des solutions obtenues.

Dans la seconde partie, nous avons étudié le comportement du modèle élémentaire à la limite du domaine de réversibilité.

Nous avons défini une méthode générale d'analyse des matériaux granulaires cohérents à l'état limite, à partir des distributions locales de déformations et de contraintes déterminées dans la première partie.

Nous avons appliqué cette méthode aux mortiers et bétons. Pour cela, nous avons envisagé plusieurs hypothèses de critère d'état limite : le critère de RANKINE, le critère de TRESCA, le critère de la distorsion maximale et le critère d'extension maximale.

L'étude des traces des surfaces d'état limite réversible dans le plan (p_1, p_2) des contraintes extérieures appliquées au modèle et des mécanismes de fissuration dans la matrice sous l'effet des sollicitations biaxiales, nous a conduit, par comparaison aux observations pratiques, à conclure que seul le critère d'extension maximale permet d'expliquer le comportement mécanique du modèle élémentaire de béton.

La troisième partie traite de la généralisation des conclusions précédentes au cas d'un modèle à singularités multiples, plus proche du matériau réel.

Nous avons étudié les effets des interactions entre singularités sur les distributions de contraintes et de déformations en tout point de la matrice. Nous avons, pour cela, formulé les lois approchées de l'influence mutuelle qui s'exerce entre plusieurs inclusions.

Les distributions de déformations et de contraintes qui en résultent nous ont permis d'étendre au matériau réel, dans le cas des mortiers et bétons, la validité du critère d'extension maximale et de confirmer ainsi les mécanismes de fissuration et de rupture définis par MASO.

A N N E X E S

=====

A N N E X E 1 ---

CALCUL DES COEFFICIENTS A_{2n}

PRINCIPE DU CALCUL ---

Il s'agit de résoudre un système de p équations linéaires à p inconnues.

$$\sum_{n=0}^p A_{2n} \cos 2n\theta = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p_1 + p_2}{2} (\kappa - 1) + p_1 + p_2 - 2A_0 + \cos 2\theta (p_1 - p_2)(1 + \kappa) - \frac{\mu}{\mu_0} (\kappa_0 - 1)A_0 \\ & \dots - \sum_{n=1}^p A_{2n} \cos 2n\theta \left[\frac{\kappa}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{\mu}{\mu_0} \left(\frac{\kappa_0}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} \right) \right] = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Les inconnues sont les coefficients A_{2n} . L'angle θ prend p_1 valeurs dans l'intervalle $[0, \alpha[$, et p_2 valeurs dans l'intervalle $]\alpha, \pi/2]$, telles que :

$$p = p_1 + p_2$$

α étant l'angle de décollement.

Les p_1 premières valeurs de θ sont reportées dans l'équation (1) ; les suivantes dans l'équation (2).

Le système s'écrit alors, d'une manière explicite, sous la forme ci-après :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_2 \cos 2\theta_0 + \dots + A_{2p-2} \cos (2p-2) \theta_0 = 0 \\ A_0 + A \cos 2\theta_1 + \dots + A_{2p-2} \cos (2p-2) \theta_1 = 0 \\ : \\ A_0 + A_2 \cos 2\theta_j + \dots + A_{2p-2} \cos (2p-2) \theta_j = 0 \\ \lambda_0 A_0 + \lambda_2 A_2 \cos 2\theta_k + \dots + \lambda_{2p-2} A_{2p-2} \cos (2p-2) \theta_k = f(\cos 2\theta_k) \\ : \\ \lambda_0 A_0 + A_2 A_2 \cos 2\theta_{p-1} + \dots + \lambda_{2p-2} A_{2p-2} \cos (2p-2) \theta_{p-1} = f(\cos 2\theta_{p-1}) \end{array} \right.$$

avec

$$\lambda_0 = 1 + \frac{\mu}{2\mu_0} (\kappa_0 - 1)$$

$$\lambda_j = \frac{\kappa}{2(2j-1)} + \frac{1}{2(2j+1)} + \frac{\mu}{\mu_0} \left(\frac{\kappa_0}{2j+1} + \frac{1}{2j-1} \right)$$

j≠0, jpair

Sous forme matricielle :

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & \cos 2\theta_0 & \dots & \cos (2p-2) \theta_0 \\ 1 & \cos 2\theta_1 & \dots & \cos (2p-2) \theta_1 \\ : & : & [D] & : \\ 1 & \cos 2\theta_j & \dots & \cos (2p-2) \theta_j \\ \hline \lambda_0 & \lambda_2 \cos 2\theta_k & \dots & \lambda_{2p-2} \cos (2p-2) \theta_k \\ : & : & [C] & : \\ \lambda_0 & \lambda_2 \cos 2\theta_{p-1} & \dots & \lambda_{2p-2} \cos (2p-2) \theta_{p-1} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} A_0 \\ A_2 \\ : \\ A_{2j} \\ A_{2k} \\ : \\ A_{2p-2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ : \\ 0 \\ f(\cos 2\theta_k) \\ : \\ f(\cos 2\theta_{p-1}) \end{array} \right]$$

D est la sous-matrice correspondant à la partie décollée de l'interface.

C est la sous-matrice correspondant à la partie en contact.

La résolution de ce système se ramène à l'inversion de la matrice DUC.

À l'issue du calcul, les valeurs des A_{2n} se trouvent à la place de la matrice second membre.

Le programme calcule également σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$, u_r et u_θ à l'interface.

NOTATIONS

Programme principal

I = indice de ligne

N = indice de colonne

Z(I,N) = terme général de la matrice second membre

Y(I,1) = terme général de la matrice second membre

RK1 = κ

AMU1 = μ

RK2 = κ_0

AMU2 = μ_0

TT = angle polaire θ exprimé en radians

DTT = angle polaire θ exprimé en degrés

ASOM = contrainte radiale

BSOM = contrainte circonférentielle

TSOM = contrainte tangentielle

CSOM = déplacement radial

DSOM = déplacement tangentiel

Sous programme

DRESYL : Sous-programme d'inversion de matrice

(en Bibliothèque au Centre Interuniversitaire de Calcul de Toulouse).

CALCUL DES COEFFICIENTS A_{2n}

TRACTION BIAXIALE

```

DOUBLE PRECISION Z,Y,TT,AN,ASOM,BSOM,CSOM,DSOM,DTT,AL
DOUBLE PRECISION P1
DIMENSION Z(27,27),Y(27,1),TT(27)
PI=3.1415926535DO
RK1=1.857142857DO
AMU1=107.14DO
RK2=2.10DO
AMU2=8140DO
DO 40 J=3,5,1
WRITE(6,50)
50 FORMAT(1H1)
P1=J
P2=1.DO
DO 1 I=1,25,1
AL=3*(I-1)
TT(I)=(PI/180.DO)*AL
DO 1 N=1,27,1
AN=N-1
Z(I,N)=DCOS(2.*AN*TT(I))
1 Y(I,1)=0.DO
DO 2 I=26,27,1
AL=3*(I-1)+12
TT(I)=(PI/180.DO)*AL
Z(I,1)=1.+AMU1*(RK2-1.)/(2.*AMU2)
DO 2 N=2,27,1
AN=N-1
Z(I,N)=(RK1/(2.*AN-1.)+1./(2.*AN+1.))+AMU1*(RK2/(2.*AN+1.))
1+1./(2.*AN-1.))/AMU2)*DCOS(2.*AN*TT(I))/2.
2 Y(I,1)=(RK1-1.)*(P1+P2)/4.+(P1+P2)/2.+DCOS(2.*TT(I))*(1.+RK1)
1*(P1-P2)/2.
CALL DRESYL (Z,27,27,Y,27,1,27,1,1.D-15,K)
DO 6 I=1,27,1
6 WRITE(6,12) Y(I,1)
12 FORMAT(D24.17)
DO 4 I=1,27,1
ASOM=Y(1,1)
BSOM=P1+P2-Y(1,1)-(P1-P2)*2.*DCOS(2.*TT(I))
CSOM=(P1+P2)*(RK1-1.)/4.+(P1+P2)/2.-Y(1,1)+(P1-P2)*(RK1+1.)*
1DCOS(2.*TT(I))/2.
DSOM=-(P1-P2)*DSIN(2.*TT(I))*(RK1+1.)/2.
DO 5 N=2,27,1
AN=N-1
ASOM=ASOM+Y(N,1)*DCOS(2.*AN*TT(I))
BSOM=BSOM+Y(N,1)*DCOS(2.*AN*TT(I))
CSOM=CSOM-Y(N,1)*DCOS(2.*AN*TT(I))*(RK1/(2.*(2.*AN-1.))+
11./(2.*(2.*AN+1.)))
DSOM=DSOM+Y(N,1)*DSIN(2.*AN*TT(I))*(RK1/(2.*(2.*AN-1.))-1.
1/(2.*(2.*AN+1.)))
5 DTT=TT(I)*180.DO/PI
4 WRITE(6,13) ASOM,BSOM,DTT,CSOM,DSOM
13 FORMAT(5F9.4)
40 WRITE(6,50)
STOP
END

```


CALCUL DES COEFFICIENTS A_{2n}

COMPRESSION

```

DOUBLE PRECISION Z,Y,TT,AN,ASOM,BSOM,CSOM,DSOM,DTT,AL
DOUBLE PRECISION P1
DIMENSION Z(27,27),Y(27,1),TT(27)
PI=3.1415926535DO
RK1=2.3333DO
AMU1=833.3333DO
RK2=2.10DO
AMU2=8140DO
WRITE(6,50)
50 FORMAT(1H1)
P1=1.DO
P2=0.DO
DO 1 I=1,25,1
AL=3*(I-1)
TT(I)=(PI/180.DO)*AL
Z(I,1)=1.+AMU1*(RK2-1.)/(2.*AMU2)
DO 1 N=2,27,1
AN=N-1
Z(I,N)=(RK1/(2.*AN-1.))+1./(2.*AN+1)+AMU1*(RK2/(2.*AN+1.))
1+1./(2.*AN-1.))/AMU2)*DCOS(2.*AN*TT(I))/2.
1 Y(I,1)=(RK1-1.)*(P1+P2)/4.+(P1+P2)/2.+DCOS(2.*TT(I))*(1.+RK1)
1*(P1-P2)/2.
DO 2 I=26,27,1
AL=3*(I-1)+12
TT(I)=(PI/180.DO)*AL
DO 2 N=1,27,1
AN=N-1
Z(I,N)=DCOS(2.*AN*TT(I))
2 Y(I,1)=0.DO
CALL DRESYL (Z,27,27,Y,27,1,27,1,1.D-15,K)
DO 6 I=1,27,1
6 WRITE(6,12) Y(I,1)
12 FORMAT(D24.17)
DO 4 I=1,27,1
ASOM=Y(1,1)
BSOM=P1+P2-Y(1,1)-(P1-P2)*2.*DCOS(2.*TT(I))
CSOM=(P1+P2)*(RK1-1.)/4.+(P1+P2)/2.-Y(1,1)+(P1-P2)*(RK1-1.)*
1DCOS(2.*TT(I))/2.
DSOM=-(P1-P2)*DSIN(2.*TT(I))*(RK1+1.)/2.
DO 5 N=2,27,1
AN=N-1
ASOM=ASOM+Y(N,1)*DCOS(2.*AN*TT(I))
BSOM=BSOM+Y(N,1)*DCOS(2.*AN*TT(I))
CSOM=CSOM-Y(N,1)*DCOS(2.*AN*TT(I))*(RK1/(2.*(2.*AN-1.))+
11./(2.*(2.*AN-1.)))
DSOM=DSOM+Y(N,1)*DSIN(2.*AN*TT(I))*(RK1/(2.*(2.*AN-1.))-1.
1/(2.*(2.*AN+1.)))
5 DTT=TT(I)*180.DO/PI
4 WRITE(6,13) ASOM,BSOM,DTT,CSOM,DSOM
13 FORMAT(5F9.4)
STOP
END

```


CALCUL DES COEFFICIENTS A_{2n}

TRACTION/COMPRESSION

```

DOUBLE PRECISION Z,Y,TT,AN,ASOM,BSOM,CSOM,DSOM,DTT,AL
DOUBLE PRECISION P1
DIMENSION Z(27,27),Y(27,1),TT(27)
PI=3.1415926535DO
RK1=2.3333DO
AMU1=833.3333DO
RK2=2.1ODO
AMU2=814ODO
DO 40 J=1,5,1
WRITE(6,50)
50 FORMAT(1H1)
P1=J
P2=-1.DO
DO 1 I=1,24,1
AL=3*(I-1)
TT(I)=(PI/180.DO)*AL
DO 1 N=1,27,1
AN=N-1
Z(I,N)=DCOS(2.*AN*TT(I))
1 Y(I,1)=0.DO
DO 2 I=25,27,1
AL=3*(I-1)+12
TT(I)=(PI/180.DO)*AL
Z(I,1)=1.+AMU1*(RK2-1.)/(2.*AMU2)
DO 2 N=2,27,1
AN=N-1
Z(I,N)=(RK1/(2.*AN-1.))+1./(2.*AN+1.)+AMU1*(RK2/(2.*AN+1.)
1+1./(2.*AN-1.))/AMU2)*DCOS(2.*AN*TT(I))/2.
2 Y(I,1)=(RK1-1.)*(P1+P2)/4.+(P1+P2)/2.+DCOS(2.*TT(I))*(1.+RK1)
1*(P1-P2)/2.
CALL DRESYL (Z,27,27,Y,27,1,27,1,1.D-15,K)
DO 6 I=1,27,1
6 WRITE(6,12) Y(I,1)
12 FORMAT(D24.17)
DO 4 I=1,27,1
ASOM=Y(1,1)
BSOM=P1+P2-Y(1,1)-(P1-P2)*2.*DCOS(2.*TT(I))
CSOM=(P1+P2)*(RK1-1.)/4.+(P1+P2)/2.-Y(1,1)+(P1-P2)*(RK1+1.)*
1DCOS(2.*TT(I))/2.
DSOM=-(P1-P2)*DSIN(2.*TT(I))*(RK1+1.)/2.
DO 5 N=2,27,1
AN=N-1
ASOM=ASOM+Y(N,1)*DCOS(2.*AN*TT(I))
BSOM=BSOM+Y(N,1)*DCOS(2.*AN*TT(I))
CSOM=CSOM-Y(N,1)*DCOS(2.*AN*TT(I))*(RK1/(2.*(2.*AN-1.))+
11./(2.*(2.*AN+1.)))
DSOM=DSOM+Y(N,1)*DSIN(2.*AN*TT(I))*(RK1/(2.*(2.*AN-1.))-1.
1/(2.*(2.*AN+1.)))
5 DTT=TT(I)*180.DO/PI
4 WRITE(6,13) ASOM,BSOM,DTT,CSOM,DSOM
13 FORMAT(5F9.4)
40 WRITE(6,50)
STOP
END

```


A N N E X E 2

CALCUL DES CONTRAINTES EN TOUT POINT DU MODELE CAS DE L'INCLUSION NON-ADHERENTE

PRINCIPE DU CALCUL

Il s'agit d'effectuer la somme d'un nombre fini de termes.

Les données de ce programme sont les coefficients A_{2n} déterminés par le programme indiqué à l'Annexe 1.

$$\sigma_r = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{R^2}{r^2} \left(\frac{p_1 + p_2}{2} - A_0 \right) + \cos 2\theta \left(1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \frac{p_1 - p_2}{2} +$$

$$\dots \sum_{n=1}^p \frac{R^{2n}}{r^{2n}} A_{2n} \left[1 - n \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \right] \cos 2n\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{R^2}{r} \left(\frac{p_1 + p_2}{2} - A_0 \right) - \cos 2\theta \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \frac{p_1 - p_2}{2} +$$

$$\dots \sum_{n=1}^p \frac{R^{2n}}{r^{2n}} A_{2n} \left[1 + n \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \right] \cos 2n\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{p_1 - p_2}{2} \left(1 - 2 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta + \sum_{n=1}^p n \frac{R^{2n}}{r^{2n}} A_{2n} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin 2n\theta$$

$$\sigma_{or} = A_0 + \sum_{n=1}^p A_{2n} \left(\frac{r^2}{R^2} \right)^{n-1} \left[\frac{r^2}{R^2} (1 - n) + n \right] \cos 2n\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A_0 + \sum_{n=1}^p A_{2n} \left(\frac{r^2}{R^2} \right)^{n-1} \left[\frac{r^2}{R^2} (1+n) - n \right] \cos 2n\theta$$

$$\tau_{\theta r} = \sum_{n=1}^p A_{2n} \left(\frac{r^2}{R^2} \right)^{n-1} \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) \sin 2n\theta$$

NOTATIONS

1er Programme

Détermination des états de contraintes dans la matrice.

I = indice de ligne

N = indice de colonne

Y(J,1) = coefficients A_{2n}

$$S = \frac{R^2}{r^2}$$

ASOM = contrainte radiale

BSOM = contrainte circonférentielle

TSOM = contrainte tangentielle

$$M = 10. \frac{r}{R}$$

CSOM = déplacement radial U_r

DSOM = déplacement tangentiel U_θ

BIREF = $\sigma_1 - \sigma_2$

PHASE = orientation, en degrés, du repère principal

TT = angle polaire θ exprimé en radians

2ème Programme

Détermination des états de contraintes dans l'inclusion.

Mêmes notations qu'au 1er programme sauf :

$$S = \frac{r^2}{R^2}, \quad E_i \text{ et } S_i = \text{déformations et contraintes principales}$$

$$i = 1, 2, 3$$

DETERMINATION DES ETATS DE CONTRAINTES DANS LA MATRICE

```

DIMENSION Y(27,1),TT(31)
PI=3.14159
RK=1.85714
P1=1.
P2=0.
DO 1 J=1,27,1
1 READ(5,20) Y(J,1)
20 FORMAT(F11.8)
DO 2 I=1,31,1
AL=3*(I-1)
TT(I)=(PI/180.)*AL
WRITE(6,21) AL
21 FORMAT(//,20X,20HANGLE POLAIRE THETA=,F4.0,/)
DO 4 L=10,20,1
REAL M
M=FLOAT(L)
S=100./(M**2)
ASOM=(P1+P2)/2.-S*(P1+P2-2.*Y(1,1))/2.+DCOS(2.*TT(I))
1(3.*S**2-4.*S+1.)*(P1-P2)/2.
BSOM=(P1+P2)/2.+S*(P1+P2-2.*Y(1,1))/2.-DCOS(2.*TT(I))
1(1.+3.*S**2)*(P1-P2)/2.
CSOM=(P1+P2)*(RK-1.)*M/4.+(P1+P2-2.*Y(1,1))/(2.*M)+DCOS
1(2.*TT(I))*(P1-P2)*((RK+1.)/M+M-S/M)/2.
TSOM=DSIN(2.*TT(I))*(P1-P2)*(3.*S**2-2.*S-1.)/2.
DSOM=-DSIN(2.*TT(I))*(P1-P2)*(S/M+(RK-1.)/M+M)/2.
DO 3 N=2,27,1
AN=N-1
ASOM=ASOM+Y(N,1)*DCOS(2.*AN*TT(I))*(1.-AN*(S-1.))*S**(N-1)
BSOM=BSOM+Y(N,1)*DCOS(2.*AN*TT(I))*(1.+AN*(S-1.))*S**(N-1)
CSOM=CSOM+Y(N,1)*DCOS(2.*AN*TT(I))*(-M*(RK/(2.*AN-1.))+1.)
1/2.+AN/(M*(2.*AN+1.)))*S**(N-1)
TSOM=TSOM+Y(N,1)*DSIN(2.*AN*TT(I))*AN*(1.-S)*S**(N-1)
3 DSOM=DSOM+Y(N,1)*DSIN(2.*AN*TT(I))*(AN/(M*(2.*AN+1.))+M*
1(RK/(2.*AN-1.))-1.)/2.)*S**(N-1)
BIREF=SQRT((ASOM-BSOM)**2+4.*(TSOM)**2)
PHASE=ATAN(2.*TSOM/(ASOM-BSOM))*180./PI
4 WRITE(6,13) ASOM,BSOM,TSOM,M,CSOM,DSOM,BIREF,PHASE
13 FORMAT(8F9.4)
2 WRITE(6,50)
50 FORMAT(1H1)
STOP
END

```


DETERMINATION DES ETATS DE CONTRAINTES DANS L'INCLUSION

```

DIMENSION Y(27,1),TT(31)
ANU=0.4
E=1.
RK=1.85714
PI=3.14159
P2=1.
P1=5.
DO 1 J=1,27,1
1 READ(5,20) Y(J,1)
20 FORMAT(F11.8)
DO 2 I=1,31,1
AL=3*(I-1)
TT(I)=(PI/180.)*AL
WRITE(6,21) AL
21 FORMAT(/,20X,20HANGLE POLAIRE THETA=,F4.0,/)
DO 2 M=10,20,1
H=FLOAT((M-10)**2)
S=H/100.
ASOM=Y(1,1) +Y(2,1)*COS(2.*TT(I))
BSOM=Y(1,1) +Y(2,1)*(2.*S-1.)*COS(2.*TT(I))
TSOM=Y(2,1)*(S-1.)*SIN(2.*TT(I))
DO 3 N=3,27,1
AN=N-1
ASOM=ASOM+Y(N,1)*(AN+S*(1.-AN))*COS(2.*AN*TT(I))*S**(N-2)
BSOM=BSOM+Y(N,1)*(S*(1.+AN)-AN)*COS(2.*AN*TT(I))*S**(N-2)
3 TSOM=TSOM+Y(N,1)*AN*(S-1.)*SIN(2.*AN*TT(I))*S**(N-2)
SGR=ASOM
SGTT=BSOM
TAURT=TSOM
BIREF=SQRT((SGR-SGTT)**2+4.*TAURT**2)
PHASE=ATAN(2.*TAURT/(SGR-SGTT))*90./PI
SOM=SGR+SGTT
S1=(BIREF+SOM)/2.
S2=(SOM-BIREF)/2.
E1=(S1-ANU*S2)/E
E2=(S2-ANU*S1)/E
E3=-ANU*SOM
2 WRITE(6,13) S1,S2,BIREF,PHASE,L,E1,E2,E3
13 FORMAT(2X,4F9.4,2X,I3,2X,3F9.4)
STOP
END

```


I N D E X B I B L I O G R A P H I Q U E
=====

- (1) - J.C. MASO "La nature minéralogique des agrégats, facteur essentiel de la résistance des bétons à la rupture et à l'action du gel".
Thèse Doct. ès Sc., Toulouse 1967.
- (2) - P. DANTU "Etude des contraintes dans les milieux hétérogènes".
Annales de l'I.T.B.T.P., janvier 1958, n° 121.
- (3) - H. CALVET "Etude sur modèle plan des déformations sous charge autour d'un granulat".
Colloque Géotechnique, Toulouse 1969.
- (4) - J. FARRAN "Contribution minéralogique à l'étude de l'adhérence entre les constituants hydratés des ciments et les matériaux enrobés".
Thèse Doct. ès Sc., Toulouse 1956.
- (5) - G.W.D. VILE "Combined stress testing machine for concrete".
The Engineer, July 1965.
- (6) - K.J. PASCOE et J.W.R. DE VILLIERS "Low cycle fatigue of steels under bi-axial straining".
Journal of Strain Analysis, 2, 117, 1967.
- (7) - H. FESSLER et J.K. MUSSON "A 30 ton biaxial tensile testing machine".
Journal of Strain Analysis, 4, n° 1, 1969.
- (8) - E. MONCH et D. GALSTER "A method for producing a defined uniform biaxial tensile stress field".
Brit. J. Appl. Phys., 63, 14, n° 11, pp 810-812.
- (9) - S.P. TIMOSHENKO et J.N. GOODIER "Théorie de l'élasticité".
Edit. Beranger, Paris 1961.
- (10) - N.I. MUSKHELISHVILI "Some basic problems of the mathematical theory of elasticity".
P. Noordhoff. Ltd. Edit.
- (11) - P. ASTRE "Etude de quelques types de contact en élasticité linéaire".
Thèse Doct. Ing., Toulouse 1969.

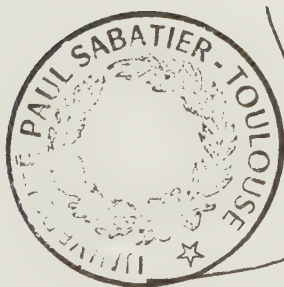
- (12) - J. COURBON "Résistance des matériaux".
Tomes I et II, Edit. Dunod, 1964.
- (13) - J. MANDEL et P. DANTU "Contribution à l'étude théorique et expérimentale du coefficient d'élasticité d'un milieu hétérogène mais statistiquement homogène".
Annales des Ponts et Chaussées, 133ème année, mars-avril 1963.
- (14) - H. BRANDENBERGER "Quatre théorèmes fondamentaux de la théorie de l'élasticité et de la résistance des matériaux allant de la déformation élastique à la rupture".
Suisse, Schweiz. Archiv., novembre 1961.
- (15) - H. BRANDENBERGER "Nouveaux résultats des recherches sur les matériaux".
Suisse, Schweiz. Bauzeitung, 13 septembre 1947.
- (16) - O. BUYUKOZTURK, A.H. NILSON et F.O. SLATE "Stress-strain response and fracture of a concrete model in biaxial loading".
A. C. I. Journal, août 1971.
- (17) - H. GACHON "Comportement d'un béton en sollicitation biaxiale".
Colloque RILEM, Cannes octobre 1972.
- (18) - A. CAQUOT "Cours de résistance des matériaux à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées".
1941-1942.
- (19) - G.W.D. VILE Paper F2, International Conference on the Structure of Concrete, Londres 1965.
- (20) - K. NEWMAN et J.B. NEWMAN Proceedings of the Southampton Civil Engineering Material Conference, 1969, Part. 2, M. TE'ENI Edit.
- (21) - A. LEON "Über die Scherfestigkeit des Betons".
Beton und Eisen, 34, 130-135, 1935.
- (22) - B. PAUL "A modification of the Coulomb-Mohr theory of fracture".
Int. Appl. Mech., 1961, 28, 259-268.

- (23) - A. STEGBAUER et
D. LINSE "Comparison of stress-strain behaviour
of concrete and other materials under
biaxial loading".
Colloque RILEM, Cannes octobre 1972.
- (24) - A. BASCOUL Thèse Doct. Ing. (à paraître).
- (25) - A. BASCOUL,
J.P. BOURDES et
J.C. MASO "Une nouvelle machine de compression
biaxiale".
Colloque RILEM, Cannes octobre 1972.
- (26) - D. LINSE et
A. STEGBAUER "Triaxial stress-strain behaviour of
concrete : testing equipment".
Colloque RILEM, Cannes octobre 1972.
- (27) - P. STROEVEN "Some aspects of the micro-mechanics
of concrete".
Ph. D. Thesis, Delft University 1973.
- (28) - V. FEODOSSIEV "Résistance des matériaux".
Collection Mir, Moscou 1971.
- (29) - S. SHIOYA "On the tension of an infinite thin
plate containing a pair of circular
inclusions".
Bulletin of the JSME, vol. 14, n° 68,
1971, pp 117-126.
- (30) - A.M. IQBAL et
E.M. KROKOSKY "Interaction stresses in composite sys-
tems".
Journal of the Eng. Mech. Division,
vol. 96, n° EM 6, décembre 1970.
- (31) - G.N. SAVIN "Stress concentration around holes".
Pergamon Press, London 1961.
- (32) - G.B. JEFFERY "Plane stress and plane strain in bi-
polar coordinates".
Trans. Roy. Soc. London, vol. CC XXI,
A590, june 1920.
- (33) - O.C. ZIENKIEWICS "La méthode des éléments finis".
Ediscience, Paris 1973.

Autorisation de Soutenance accordée

TOULOUSE, le 8 FEV 1974

Le Président
de l'Université PAUL-SABATIER :



L. LARENG

